

図チャレ 第180回 (2016年9月)

xy 平面上において, 連立不等式

$$\begin{cases} -3 \leq x \leq 3 \\ 0 \leq y \leq 4 \\ x^2 + (y-2)^2 \geq 1 \end{cases}$$

で表される領域を H とし, 半径 r の円板 D_r は H 内にあるものとする。

- (1) r の最大値を求めよ。
- (2) $r = 1$ のとき, 円板 D_1 が領域 H 内で通過し得る範囲の面積 S を求めよ。

解答

- (1) 領域 H は y 軸および直線 $y = 2$ に関して対称であるから, r が最大となるとき, 円板 D_r は円 $x^2 + (y-2)^2 = 1$ と外接し, x 軸および直線 $x = 3$ に接するとしてよい。このとき

$$D_r \text{ の中心は } (3-r, r)$$

であり, 円 $x^2 + (y-2)^2 = 1$ と外接する条件を考えて

$$\begin{aligned} (3-r-0)^2 + (r-2)^2 &= (r+1)^2 \\ r^2 - 12r + 12 &= 0 \end{aligned}$$

図形的に考えて $0 < r < 2$ であるから

$$r = 6 - 2\sqrt{6} \quad (\text{答})$$

- (2) D_1 が $x^2 + (y-2)^2 = 1$ と x 軸に接するとき, 2円の中心と点 $(0, 1)$ を結んでできる三角形が直角三角形となることより

$$D_1 \text{ の中心は } (\sqrt{3}, 1)$$

したがって, $0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2$ において D_1 が通過し得ない部分は

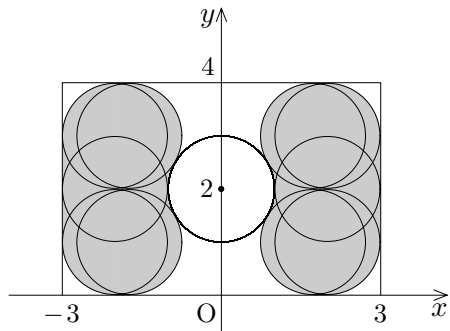
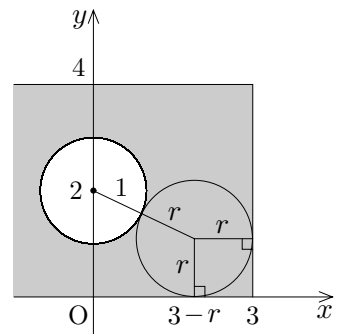
$$x^2 + (y-2)^2 \leq 1$$

と

$$\begin{cases} x^2 + (y-2)^2 \geq 1 \\ (x-\sqrt{3})^2 + (y-1)^2 \geq 1 \\ y \leq \frac{3}{2} \end{cases}$$

と

$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y-1)^2 \geq 1 \\ x \geq 2 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$$



であり、それぞれ面積は

$$\frac{\pi}{4}$$
$$\frac{1}{2} \times (2+1) \times \sqrt{3} - \frac{1}{2} \times 1^2 \times \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} \times 1^2 \times \frac{2}{3}\pi = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{2}$$
$$1 - \frac{\pi}{4}$$

である。

領域 H 内で円板 D_1 が通過し得る面積 S は

$$S = 4 \left\{ 3 \times 2 - \frac{\pi}{4} - \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{2} \right) - \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) \right\}$$
$$= 4 \left(5 - \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{2} \right)$$
$$= 20 - 6\sqrt{3} + 2\pi \quad (\text{答})$$