

# 図チャレ 第181回(2016年10月)

三角形ABCの外心をO, 垂心をHとし, 辺ABの中点をM, 辺BCの中点をNとおく。

- (1) BHの中点をPとするとき, 四角形OMPNは平行四辺形であることを示せ。
- (2) 線分OHと中線ANの交点Gは, 三角形ABCの重心であることを示せ。

解答

- (1) Oは外心, Hは垂心であることより

$$OM \perp AB, \quad CH \perp AB$$

であるから,

$$OM \parallel CH$$

$\triangle BCH$ において中点連結定理より

$$CH \parallel NP$$

であるから,

$$OM \parallel NP$$

Oは外心, Hは垂心であることより

$$ON \perp BC, \quad AH \perp BC$$

であるから,

$$ON \parallel AH$$

$\triangle ABH$ において中点連結定理より

$$AH \parallel MP$$

であるから,

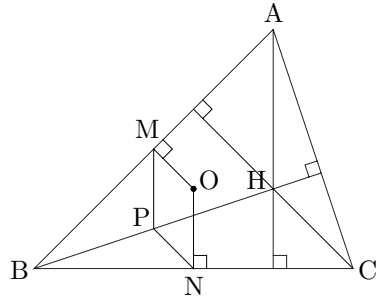
$$ON \parallel MP$$

..... ①

..... ②

①かつ②より, 四角形OMPNは平行四辺形である。

(証明おわり)



- (2) (1)より

$$ON \parallel MP, \quad ON = MP$$

$\triangle ABH$ において中点連結定理より

$$MP \parallel AH, \quad MP = \frac{1}{2}AH$$

であるから,

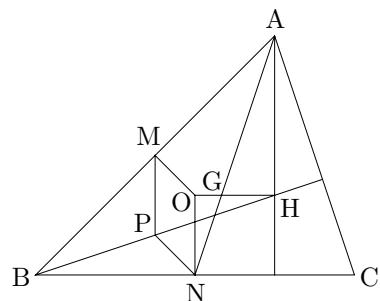
$$ON \parallel AH, \quad ON = \frac{1}{2}AH$$

特に,

$$\angle GON = \angle GHA, \quad \angle GNO = \angle GAH$$

であるから,

$$\triangle GON \cong \triangle GHA$$



であり，相似比は  $1:2$  である。よって，

$$GN : GA = 1 : 2$$

点  $G$  は中線  $AN$  を  $2:1$  に内分するから， $\triangle ABC$  の重心である。

(証明おわり)