

## 図チャレ 第182回 (2016年11月)

正四面体  $OABC$  の辺  $OB$  上に点  $P$ , 辺  $OC$  上に点  $Q$  を  $\angle APQ = 90^\circ$  となるようにとる。  $\overrightarrow{OP} = p\overrightarrow{OB}$  ( $0 < p < 1$ ),  $\overrightarrow{OQ} = q\overrightarrow{OC}$  ( $0 < q < 1$ ) とするとき,

- (1)  $p$  のとり得る値の範囲を求めよ。
- (2)  $q$  の最大値を求めよ。
- (3)  $\triangle APQ$  は直角二等辺三角形にはなり得ないことを示せ。

### 解答

- (1)  $p, q$  の値は比を表すから,

$$|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}| = 1$$

として一般性を失わない。

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA} = 1^2 \times \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} - p\overrightarrow{OB}$$

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = -p\overrightarrow{OB} + q\overrightarrow{OC}$$

$\angle APQ = 90^\circ$  より

$$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PQ} = (\overrightarrow{OA} - p\overrightarrow{OB}) \cdot (-p\overrightarrow{OB} + q\overrightarrow{OC}) = 0$$

$$-p\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + q\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} + p^2|\overrightarrow{OB}|^2 - pq\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = 0$$

$$-p \times \frac{1}{2} + q \times \frac{1}{2} + p^2 \times 1^2 - pq \times \frac{1}{2} = 0$$

$$\therefore (1-p)q = p - 2p^2$$

$0 < p < 1$  より

$$q = \frac{p - 2p^2}{1 - p}$$

$0 < q < 1$  より

$$0 < \frac{p - 2p^2}{1 - p} < 1$$

$$0 < p - 2p^2 < 1 - p$$

$$2p\left(p - \frac{1}{2}\right) < 0 \quad \text{かつ} \quad 2p^2 - 2p + 1 = p^2 + (p-1)^2 > 0$$

$$\therefore 0 < p < \frac{1}{2} \quad (\text{答})$$

- (2)  $0 < p < \frac{1}{2}$  を考えて, 相加・相乗平均の不等式を用いると

$$q = \frac{p - 2p^2}{1 - p} = \frac{1 - (1-p) - 2(1-p-1)^2}{1 - p}$$

$$\begin{aligned}
&= 3 - \left\{ 2(1-p) + \frac{1}{1-p} \right\} \\
&\leq 3 - 2\sqrt{2(1-p) \cdot \frac{1}{1-p}} = 3 - 2\sqrt{2}
\end{aligned}$$

ここで、不等式の等号は

$$2(1-p) = \frac{1}{1-p} \quad \left(0 < p < \frac{1}{2}\right) \quad \text{すなわち} \quad p = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

のとき成り立つから、

$$q \text{ の最大値は } 3 - 2\sqrt{2} \quad (\text{答})$$

(3)  $\triangle APQ$  が直角二等辺三角形になるとすれば、

$$AP = PQ$$

が成り立つ。

$$\begin{aligned}
|\overrightarrow{AP}|^2 &= |\overrightarrow{OA}|^2 - 2p\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + p^2|\overrightarrow{OB}|^2 = p^2 - p + 1 \\
|\overrightarrow{PQ}|^2 &= p^2|\overrightarrow{OB}|^2 - 2pq\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} + q^2|\overrightarrow{OC}|^2 = p^2 - pq + q^2
\end{aligned}$$

より

$$-p + 1 = -pq + q^2 \quad \therefore (1-q)p = 1 - q^2$$

$0 < q \leq 3 - 2\sqrt{2}$  より  $1 - q \neq 0$  であるから

$$p = 1 + q$$

$0 < p < \frac{1}{2}$ ,  $0 < q \leq 3 - 2\sqrt{2}$  よりこれは不可能である。

よって、 $\triangle APQ$  は直角二等辺三角形にはなり得ない。

(証明おわり)