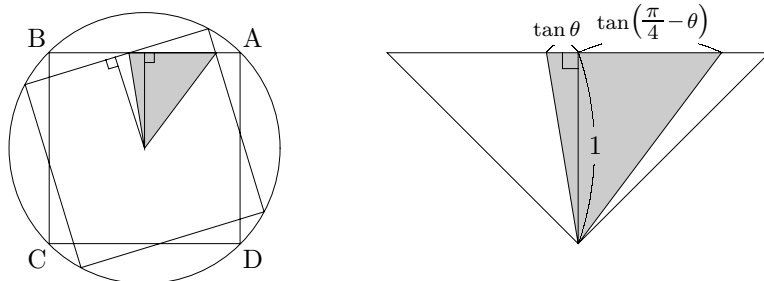


## 図チャレ 第183回(2016年12月)

一辺の長さ2の正八面体O-ABCD-Pを直線OPを軸として回転させてできる図形をXとすると、正八面体OABCDPと正八面体Xとの共通部分の体積をVとする。Vの最小値を求めよ。

解答



正方形ABCDを $2\theta$  ( $0 < 2\theta < \frac{\pi}{2}$ )回転させてXの断面に重なるとすれば、共通部分の面積Sは

$$\begin{aligned} S &= \left\{ \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \tan \theta + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \tan \left( \frac{\pi}{4} - \theta \right) \right\} \times 8 \\ &= 4 \left\{ \tan \theta + \tan \left( \frac{\pi}{4} - \theta \right) \right\} \\ &= 4 \left( \tan \theta + \frac{\tan \frac{\pi}{4} - \tan \theta}{1 + \tan \frac{\pi}{4} \tan \theta} \right) = 4 \left( \tan \theta + \frac{1 - \tan \theta}{1 + \tan \theta} \right) \end{aligned}$$

$t = \tan \theta$  とおくと、 $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$  より

$$0 < t < 1$$

であり、相加・相乗平均の不等式より

$$\begin{aligned} S &= 4 \left( t + \frac{2 - (t + 1)}{t + 1} \right) \\ &= 4 \left( t + 1 + \frac{2}{t + 1} - 2 \right) \geq 4 \left( 2\sqrt{(t + 1) \cdot \frac{2}{t + 1}} - 2 \right) = 8(\sqrt{2} - 1) \end{aligned}$$

ここで、不等式の等号は

$$t + 1 = \frac{2}{t + 1} \quad (0 < t < 1) \quad \text{すなわち} \quad t = -1 + \sqrt{2}$$

のとき成り立つから、

$$\text{面積 } S \text{ の最小値は } 8(\sqrt{2} - 1)$$

Vの最小値は

$$\frac{1}{3} \cdot (S \text{ の最小値}) \cdot \overline{OP} = \frac{1}{3} \times 8(\sqrt{2} - 1) \times 2\sqrt{2} = \frac{32 - 16\sqrt{2}}{3} \quad (\text{答})$$

(別解) 正方形 ABCD を直線 OP を軸として回転させたときの正方形の頂点をそれぞれ  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ ,  $D'$  とする。辺  $A'D'$  と辺 AB, 辺 AD との交点をそれぞれ E, F とするとき,

$$AE = a, \quad AF = b$$

とおく。

直角三角形 AEF において, 三平方の定理より

$$EF = \sqrt{a^2 + b^2}$$

辺 AD と辺  $C'D'$  の交点を G とするとき, 図の対称性より

$$\triangle AEF \equiv \triangle D'GF, \quad DG = D'G = AE$$

であるから

$$AD = AF + FG + GD = b + \sqrt{a^2 + b^2} + a$$

$$\therefore a + b + \sqrt{a^2 + b^2} = 2 \quad \dots\dots ①$$

正方形 ABCD の中心を K とすると, 正方形 ABCD と正方形  $A'B'C'D'$  の共通部分は  $\triangle KFG$  と合同な三角形 8 個をあわせたものであるから, 面積  $S$  は

$$S = \frac{1}{2} \cdot FG \cdot 1 \times 8 = 4\sqrt{a^2 + b^2} \quad \dots\dots ②$$

$u = a + b$ ,  $v = ab$  とおくと, ①より

$$\sqrt{u^2 - 2v} = 2 - u > 0 \quad \dots\dots ③$$

$0 < u < 2$  のもとで

$$u^2 - 2v = (2 - u)^2$$

$$\therefore v = 2u - 2 \quad (0 < u < 2) \quad \dots\dots ④$$

$a, b$  を 2 解とする 2 次方程式

$$x^2 - ux + v = 0$$

の 2 解がともに正であることより, ④も考え

$$\begin{cases} \frac{1}{4}(\text{判別式}) = u^2 - 4v = u^2 - 4(2u - 2) \geq 0 \\ (2 \text{ 解の和}) = u > 0 \\ (2 \text{ 解の積}) = v = 2u - 2 > 0 \end{cases}$$

$$\therefore 1 < u \leq 4 - 2\sqrt{2} \quad \dots\dots ⑤$$

②, ③より

$$S = 4\sqrt{u^2 - 2v} = 4(2 - u)$$

⑤は  $u$  が実際とり得る値の範囲を表すから,  $S$  は

$$u = 4 - 2\sqrt{2} \text{ のとき最小値 } 4(2 - 4 + 2\sqrt{2}) = 8(\sqrt{2} - 1)$$

をとる。よって,  $V$  の最小値は

$$\frac{1}{3} \times 8(\sqrt{2} - 1) \times 2\sqrt{2} = \frac{32 - 16\sqrt{2}}{3} \quad (\text{答})$$

