

図チャレ 第184回(2017年1月)

正八角形 ABCDEFGH において、2つの対角線 AE, DH の交点を P とし、AE, DH と BG との交点をそれぞれ Q, R とする。

- (1) 点 Q は対角線 CH 上にもあることを示せ。
- (2) 正八角形 ABCDEFGH の一辺の長さを 1 とするとき、三角形 PQR の面積 S を求めよ。

解答

- (1) 2つの対角線 BG, CH の交点を K とすると、

$$AB \parallel CH, AH \parallel BG$$

であるから、四角形 ABKH は平行四辺形である。

さらに、 $AB = AH$ であるから

四角形 ABKH はひし形である。

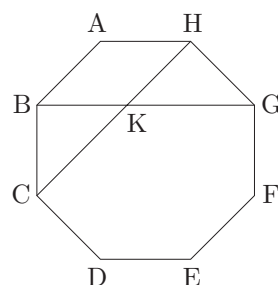
特に、ひし形 ABKH は直線 AK に関して対称である。

正八角形 ABCDEFGH は直線 AE に関して対称である

から、3点 A, K, E は一直線上にあり、

$$K = Q$$

である。すなわち、点 Q は対角線 CH 上にある。



(証明おわり)

- (2) (1)の証明内容より

$$BQ = AH = 1$$

が成り立ち、同様に

$$RG = AH = 1$$

も示されるから、

$$\begin{aligned} QR &= BG - BQ - RG \\ &= 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \times 2 - 1 - 1 \\ &= \sqrt{2} - 1 \end{aligned}$$

点 P から線分 QR におろした垂線の長さ h は

$$h = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}$$

$\triangle PQR$ の面積 S は

$$S = \frac{1}{2} \times (\sqrt{2} - 1) \times h = \frac{\sqrt{2} - 1}{4} \quad (\text{答})$$

