

図チャレ 第185回 (2017年2月)

四角形 ABCD は半径 1 の円に内接し、対角線 AC, BD の長さはともに $\sqrt{3}$ であるとす。このとき四角形の 4 辺の長さの和 $AB + BC + CD + DA$ のとり得る最大の値を求めよ。

出典：2007 年 弘前大学 理工学部

解答

AC の中点を M, BD の中点を N とする。

外接円の半径が 1, $AC = BD = \sqrt{3}$ であるから

$$\angle AOM = \angle COM = \angle BON = \angle DON = \frac{\pi}{3}$$

であり,

$$\angle MON = 2\theta \quad \left(0 < \theta < \frac{\pi}{3}\right)$$

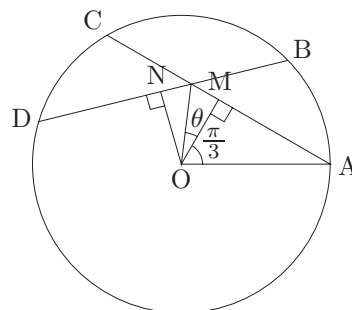
とおくと,

$$\angle AOB = \left(\frac{\pi}{3} + \theta\right) - \left(\frac{\pi}{3} - \theta\right) = 2\theta$$

$$\angle BOC = 2\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right)$$

$$\angle COD = \angle AOB = 2\theta$$

$$\angle DOA = 2\left(\frac{\pi}{3} + \theta\right) \text{ または } 2\pi - 2\left(\frac{\pi}{3} + \theta\right)$$



補角の公式より

$$\sin\left(\frac{\pi}{3} + \theta\right) = \sin\left\{\pi - \left(\frac{\pi}{3} + \theta\right)\right\}$$

であるから,

$$DA = 2 \sin\left(\frac{\pi}{3} + \theta\right)$$

であるとしてよい。

$$AB + BC + CD + DA$$

$$= 2 \sin \theta + 2 \sin\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right) + 2 \sin \theta + 2 \sin\left(\frac{\pi}{3} + \theta\right)$$

$$= 4 \sin \theta + 4 \sin \frac{\pi}{3} \cos \theta$$

$$= 2(2 \sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta)$$

$$= 2\sqrt{7} (\sin \theta \cos \alpha + \cos \theta \sin \alpha)$$

$$= 2\sqrt{7} \sin(\theta + \alpha)$$

ただし, α は

$$\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{7}}, \quad \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} \quad \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$$

を満たす定数である。

$$\sin \alpha - \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} - \frac{1}{2} = \frac{2\sqrt{3} - \sqrt{7}}{2\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{12} - \sqrt{7}}{2\sqrt{7}} > 0$$

より

$$\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

であるから、

$$\alpha < \frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{3} + \alpha$$

となって、 $\frac{\pi}{2}$ は $\theta + \alpha$ の定義域内にある。

よって、 $\theta + \alpha = \frac{\pi}{2}$ のとき、 $AB + BC + CD + DA$ は

最大値 $2\sqrt{7}$ (答)

をとる。