

図チャレ 第186回(2017年3月)

複素数平面上の3点 $A(\alpha)$, $B(\beta)$, $C(\gamma)$ は正三角形 ABC をなし, $\alpha\beta\gamma = -1$ をみたしている。 $\triangle ABC$ の重心 $D(\delta)$ が実軸上にあり $\delta > -1$ であるとき, 次の問いに答えよ。ただし, 複素数平面上で複素数 z を表す点 P を $P(z)$ と書く。

- (1) $\triangle ABC$ の外接円の半径 ℓ を δ の式で表せ。
- (2) α, β, γ を δ の式でそれぞれ表せ。ただし, $-\pi \leq \arg \alpha < \arg \beta < \arg \gamma < \pi$ とする。ここで $\arg z$ は複素数 z の偏角を表す。

出典：2017年 東京慈恵会医科大学

解答

(1) $D(\delta)$ は $\triangle ABC$ の重心であるから

$$\alpha + \beta + \gamma = 3\delta \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\omega = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}$ とおくと, $\triangle ABC$ は正三角形であるから

$$\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = \omega \text{ または } \bar{\omega}$$

$$\{\gamma - \alpha - \omega(\beta - \alpha)\}\{\gamma - \alpha - \bar{\omega}(\beta - \alpha)\} = 0$$

$$(\gamma - \alpha)^2 - (\omega + \bar{\omega})(\beta - \alpha)(\gamma - \alpha) + \omega\bar{\omega}(\beta - \alpha)^2 = 0$$

$$(\gamma - \alpha)^2 - (\beta - \alpha)(\gamma - \alpha) + (\beta - \alpha)^2 = 0$$

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha = 0$$

$$(\alpha + \beta + \gamma)^2 - 3(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) = 0$$

①も用いて

$$(3\delta)^2 - 3(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) = 0$$

$$\therefore \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 3\delta^2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②および

$$\alpha\beta\gamma = -1$$

より, α, β, γ を3解とする3次方程式は

$$z^3 - 3\delta z^2 + 3\delta^2 z + 1 = 0$$

$$\therefore (z - \delta)^3 = -1 - \delta^3 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

両辺の絶対値をとり, δ は -1 より大きい実数であることを考えると

$$|z - \delta|^3 = |-(1 + \delta^3)| = \delta^3 + 1$$

$$\therefore |z - \delta| = \sqrt[3]{\delta^3 + 1}$$

正三角形の重心 $D(\delta)$ は外心でもあるから, 外接円の半径 ℓ は

$$\ell = \sqrt[3]{\delta^3 + 1} \quad (\text{答})$$

(2) ③より, α, β, γ を 3 解とする 3 次方程式は

$$(z - \delta)^3 = (-\ell)^3$$

$$\therefore \left(\frac{z - \delta}{-\ell} \right)^3 = 1$$

$\frac{z - \delta}{-\ell}$ は 1 の 3 乗根であるから

$$\frac{z - \delta}{-\ell} = \cos \frac{2k}{3}\pi + i \sin \frac{2k}{3}\pi$$

$$\therefore z = \delta - \ell \left(\cos \frac{2k}{3}\pi + i \sin \frac{2k}{3}\pi \right) \quad (k = 0, 1, 2)$$

$\delta > -1$ より三角形 ABC の位置によらず頂点の偏角の順番は変わらないことを考え,

$$-\pi \leq \arg \alpha < \arg \beta < \arg \gamma < \pi, \quad \ell = \sqrt[3]{\delta^3 + 1}$$

より

$$\alpha = \delta + \ell \left\{ \cos \left(-\frac{2}{3}\pi \right) + i \sin \left(-\frac{2}{3}\pi \right) \right\} = \delta + \sqrt[3]{\delta^3 + 1} \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right),$$

$$\beta = \delta + \ell = \delta + \sqrt[3]{\delta^3 + 1},$$

$$\gamma = \delta + \ell \left(\cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi \right) = \delta + \sqrt[3]{\delta^3 + 1} \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)$$

(答)