

図チャレ 第187回(2017年4月)

双曲線 $H: x^2 - y^2 = 1$ 上の3点 $A(-1, 0)$, $B(1, 0)$, $C(s, t)$ ($t \neq 0$) を考える.

- (1) 点 A における H の接線と直線 BC の交点を P とするとき, P の座標を s と t を用いてあらわせ.
- (2) 点 C における H の接線と直線 AB の交点を Q とするとき, Q の座標を s と t を用いてあらわせ.
- (3) 点 B における H の接線と直線 AC の交点を R とするとき, 3点 P, Q, R は一直線上にあることを証明せよ.

出典: 2017年 大阪大学

解答

- (1) 点 A における H の接線は

$$x = -1$$

$t \neq 0$ より $s \neq \pm 1$ であることを考え, 直線 BC の方程式は

$$y = \frac{t}{s-1}(x-1)$$

交点 P は

$$P\left(-1, \frac{2t}{1-s}\right) \quad (\text{答})$$

- (2) 点 C における H の接線の方程式は

$$sx - ty = 1$$

直線 AB ($y = 0$) との交点 Q は

$$Q\left(\frac{1}{s}, 0\right) \quad (\text{答})$$

- (3) 点 B における H の接線 $x = 1$ と直線 $AC: y = \frac{t}{s+1}(x+1)$ との交点 R は

$$R\left(1, \frac{2t}{1+s}\right)$$

であり,

$$\overrightarrow{QP} = \left(-1 - \frac{1}{s}, \frac{2t}{1-s}\right) = \frac{1}{s(1-s)}(s^2 - 1, 2st)$$

$$\overrightarrow{QR} = \left(1 - \frac{1}{s}, \frac{2t}{1+s}\right) = \frac{1}{s(1+s)}(s^2 - 1, 2st) = \frac{1-s}{1+s} \overrightarrow{QP}$$

であるから, 3点 P, Q, R は一直線上にある。

(証明おわり)