

図チャレ 第 188 回 (2017 年 5 月)

座標空間内の次のような 4 点 A, B, C, D を考える。A の座標は $(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6})$, 3 点 B, C, D は, それぞれ x 軸, y 軸, z 軸上にある。さらに, これらの 4 点は同一平面上にあり, 四角形 ABCD は平行四辺形である。このとき, 次の問いに答えよ。

- (1) 3 点 B, C, D の座標を求めよ。
- (2) 平行四辺形 ABCD の面積を求めよ。
- (3) 原点 O から平行四辺形 ABCD を含む平面に垂線 OH を下ろす。点 H の座標を求めよ。

出典 : 2017 年 新潟大学

解答

- (1) $B(b, 0, 0)$, $C(0, c, 0)$, $D(0, 0, d)$ とおくと, 四角形 ABCD は平行四辺形であるから,

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$$

であり, 成分を比べると

$$\begin{cases} b - \sqrt{2} = 0 \\ -\sqrt{3} = c \\ -\sqrt{6} = -d \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} b = \sqrt{2} \\ c = -\sqrt{3} \\ d = \sqrt{6} \end{cases}$$

3 点 B, C, D の座標は

$$B(\sqrt{2}, 0, 0), C(0, -\sqrt{3}, 0), D(0, 0, \sqrt{6}) \quad (\text{答})$$

- (2) $\overrightarrow{AB} = (0, -\sqrt{3}, -\sqrt{6})$, $\overrightarrow{AD} = (-\sqrt{2}, -\sqrt{3}, 0)$

平行四辺形 ABCD の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2 |\overrightarrow{AD}|^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD})^2} \\ &= \sqrt{9 \times 5 - 3^2} \\ &= 6 \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(3) 平面 BCD の方程式は

$$\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{-\sqrt{3}} + \frac{z}{\sqrt{6}} = 1$$

$$\therefore \sqrt{3}x - \sqrt{2}y + z = \sqrt{6}$$

\vec{OH} は平面 BCD と垂直であるから

$$\vec{OH} = k(\sqrt{3}, -\sqrt{2}, 1) \quad (k \text{ は実数})$$

と表され, H は平面 BCD 上の点であるから

$$\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}k - \sqrt{2} \cdot (-\sqrt{2}k) + k = \sqrt{6}$$

$$\therefore k = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

点 H の座標は

$$H\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right) \quad (\text{答})$$