

図チャレ 第189回(2017年6月)

座標平面上の3点 $P(x, y)$ ($x > 0, y > 0$), $A(a, 0)$ ($a > 0$), $B(0, b)$ ($b > 0$) は, $PA = PB = 1$ をみたすものとする. O を原点とし, 線分 OA, AP, PB, BO で囲まれた図形の面積を S とする. 次の問いに答えよ.

問1 $\angle APB$ を固定して3点 P, A, B を動かす. S が最大となるとき, $x = y$ かつ $a = b$ であることを示せ.

問2 $\angle APB$ を固定せず, 条件 $x = y$ かつ $a = b$ のもとで P, A, B を動かす. このとき, S の最大値を求めよ.

出典: 2017年 大阪市立大学

解答

問1 $PA = PB = 1$ であるから, $\angle APB$ を固定するとき $\triangle ABP$ の面積は一定である.
相加・相乗平均の不等式より

$$\triangle OAB = \frac{1}{2}ab \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2 + b^2}{2}$$

不等式の等号は

$$a = b$$

のとき成り立つから,

$$S \text{ が最大} \iff \triangle OAB = \frac{1}{2}ab \text{ が最大} \iff a = b$$

$a = b > 0$ のとき

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-0)^2 + (y-a)^2}$$

$$(x-a)^2 + y^2 = x^2 + (y-a)^2$$

$$-2ax = -2ay$$

$$\therefore x = y$$

(証明おわり)

問2 $a = b, x = y$ のとき, AB の中点を M とすると

$$AB \perp PM$$

直角三角形 AMP において三平方の定理より

$$PM = \sqrt{AP^2 - AM^2} = \sqrt{1^2 - \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{a^2}{2}}$$

$$S = \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}a \cdot \sqrt{1 - \frac{a^2}{2}} = \frac{1}{2}(a^2 + a\sqrt{2-a^2})$$

$0 < a < \sqrt{2}$ において

$$\begin{aligned}\frac{dS}{da} &= \frac{1}{2} \left(2a + 1 \cdot \sqrt{2-a^2} + a \cdot \frac{1}{2\sqrt{2-a^2}} \cdot (-2a) \right) \\ &= \frac{2a\sqrt{2-a^2} + (2-a^2) - a^2}{2\sqrt{2-a^2}} \\ &= \frac{a\sqrt{2-a^2} + 1 - a^2}{\sqrt{2-a^2}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dS}{da} < 0 &\iff a\sqrt{2-a^2} < a^2 - 1 \\ &\iff a^2(2-a^2) < (a^2-1)^2 \text{ かつ } a^2 - 1 > 0 \\ &\iff 2a^4 - 4a^2 + 1 > 0 \text{ かつ } a^2 > 1 \\ &\iff a^2 > \frac{2+\sqrt{2}}{2} \\ &\iff a > \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}\end{aligned}$$

であるから, a の関数として S の増減は

a	(0)	$\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}$	$(\sqrt{2})$
$\frac{dS}{da}$	+	0	-
S	↗	極大	↘

S は $a = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}$ のとき最大値

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \left(\frac{2+\sqrt{2}}{2} + \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{2-\sqrt{2}}{2}} \right) &= \frac{1}{2} \left(\frac{2+\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\ &= \frac{1+\sqrt{2}}{2} \quad (\text{答})\end{aligned}$$

をとる。