

図チャレ 第190回 (2017年7月)

座標空間において，曲面 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ ($x > 0$) を K とし， xy 平面上の直線 $x = 2$ を含み， xy 平面と $\frac{\pi}{3}$ をなす平面を α ， β とするとき， K と α ， β で囲まれている有界部分を R とする。

- (1) R と xy 平面の共通部分を D とするとき， D の面積 S を求めよ。
- (2) R の体積 V を求めよ。

解答

- (1) $y \geq 0$ のもとで，

$$x^2 - \frac{y^2}{3} = 1 \iff y = \sqrt{3} \sqrt{x^2 - 1}$$

$x = \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{t} \right)$ ($t \geq 1$) により置換すると

$$\begin{aligned} 1 \leq \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{t} \right) \leq 2 &\iff \begin{cases} t^2 - 2t + 1 = (t-1)^2 \geq 0 \\ t^2 - 4t + 1 \leq 0 \end{cases} \\ &\iff 1 \leq t \leq 2 + \sqrt{3} \end{aligned}$$

であり， D の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= 2 \int_1^{2+\sqrt{3}} \sqrt{3} \sqrt{x^2 - 1} \, dx \\ &= 2\sqrt{3} \int_1^{2+\sqrt{3}} \sqrt{\frac{1}{4} \left(t + \frac{1}{t} \right)^2 - 1} \cdot \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{t} \right)' dt \\ &= 2\sqrt{3} \int_1^{2+\sqrt{3}} \frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right) \cdot \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{t^2} \right) dt \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \int_1^{2+\sqrt{3}} \left(t - \frac{2}{t} + \frac{1}{t^3} \right) dt \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \left[\frac{1}{2} \left(t^2 - \frac{1}{t^2} \right) - 2 \log t \right]_1^{2+\sqrt{3}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \left\{ \frac{(2+\sqrt{3})^2 - (2-\sqrt{3})^2}{2} - 2 \log(2+\sqrt{3}) \right\} \\ &= 6 - \sqrt{3} \log(2+\sqrt{3}) \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

- (2) R を連立不等式で表すと，

$$x^2 - \frac{y^2}{3} \geq 1 \quad \text{かつ} \quad x \geq 1 \quad \text{かつ} \quad \sqrt{3}(x-2) \leq z \leq -\sqrt{3}(x-2)$$

平面 $x = t$ ($1 \leq t \leq 2$) による断面は，長方形

$$y^2 \leq 3(t^2 - 1) \text{ かつ } \sqrt{3}(t-2) \leq z \leq -\sqrt{3}(t-2)$$

であり, 断面積 $S(t)$ は

$$S(t) = 2\sqrt{3}\sqrt{t^2-1} \cdot 2\sqrt{3}(2-t) = 12(2-t)\sqrt{t^2-1}$$

(1)の結果 $\int_1^2 2\sqrt{3}\sqrt{x^2-1} dx = 6 - \sqrt{3} \log(2 + \sqrt{3})$ も用いて,

R の体積 V を求めると

$$\begin{aligned} V &= \int_1^2 S(t) dt \\ &= 4\sqrt{3} \int_1^2 2\sqrt{3}\sqrt{t^2-1} dt - 6 \int_1^2 (t^2-1)^{\frac{1}{2}} \cdot 2t dt \\ &= 4\sqrt{3} \{6 - \sqrt{3} \log(2 + \sqrt{3})\} - 6 \left[\frac{2}{3}(t^2-1)^{\frac{3}{2}} \right]_1^2 \\ &= 4\sqrt{3} \{6 - \sqrt{3} \log(2 + \sqrt{3})\} - 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3\sqrt{3} \\ &= 12\sqrt{3} - 12 \log(2 + \sqrt{3}) \quad (\text{答}) \end{aligned}$$