

図チャレ 第192回(2017年9月)

2 定点 O, A を通る円 C を動かすとき, 円 C に内接する四角形 $OPAQ$ に対して $\angle AOP = \angle AOQ$ が一定ならば, $OP + OQ$ は一定であることを示せ。

解答

$$OA = a, OP = p, OQ = q, \angle AOP = \angle AOQ = \theta$$

として, $\triangle OAP$ および $\triangle OAQ$ に余弦定理を適用すると

$$AP^2 = a^2 + p^2 - 2ap \cos \theta$$

$$AQ^2 = a^2 + q^2 - 2aq \cos \theta$$

$\angle AOP = \angle AOQ$ より $AP = AQ$ であるから

$$p^2 - 2ap \cos \theta = q^2 - 2aq \cos \theta$$

$$p^2 - q^2 - 2a(p - q) \cos \theta = 0$$

$$(p - q)(p + q - 2a \cos \theta) = 0$$

$$\therefore p = q \text{ または } p + q = 2a \cos \theta$$

$p = q$ のときは, 三辺相等により

$$\triangle OAP \equiv \triangle OAQ$$

となるが, 円に内接する四角形の性質より

$$\angle OPA + \angle OQA = 180^\circ$$

であるから,

$$\angle OPA = \angle OQA = 90^\circ \quad \therefore p = q = a \cos \theta$$

したがって, いずれの場合も

$$p + q = 2a \cos \theta \quad (\text{一定})$$

(証明おわり)