

図チャレ 第193回 (2017年10月)

一辺の長さ1の正方形ABCDにおいて、辺BC上に点P、辺CD上に点Qをとり、 $AP = PQ$ を満たしながら動くとき、三角形APQの面積の最大値と最小値を求めよ。

解答

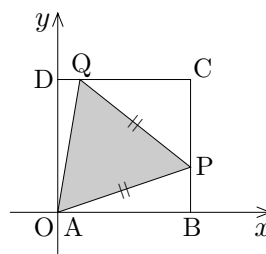
座標平面上で $A(0, 0)$, $B(1, 0)$, $C(1, 1)$, $D(0, 1)$, $Q(t, 1)$ ($0 \leq t \leq 1$) とするとき、ABの垂直二等分線の方程式は

$$x^2 + y^2 = (x-t)^2 + (y-1)^2$$

$$\therefore 2tx + 2y = t^2 + 1$$

直線 $x = 1$ との交点を求めて、

$$P\left(1, \frac{(1-t)^2}{2}\right)$$



$\triangle APQ$ の面積 $S(t)$ は

$$\begin{aligned} S(t) &= 1^2 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{(1-t)^2}{2} - \frac{1}{2} \cdot \left\{1 - \frac{(1-t)^2}{2}\right\} \cdot (1-t) - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot t \\ &= 1 - \frac{1}{4}(1-t)^2 - \frac{1}{2}(1-t) + \frac{1}{4}(1-t)^3 - \frac{1}{2}t \\ &= \frac{1}{4}(1-t)^3 - \frac{1}{4}(1-t)^2 + \frac{1}{2} \\ &= -\frac{1}{4}(t-1)^3 - \frac{1}{4}(t-1)^2 + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

微分すると

$$\begin{aligned} S'(t) &= -\frac{3}{4}(t-1)^2 - \frac{1}{2}(t-1) \\ &= -\frac{3}{4}(t-1)\left(t-1 + \frac{2}{3}\right) = -\frac{3}{4}(t-1)\left(t - \frac{1}{3}\right) \end{aligned}$$

t	0	$\frac{1}{3}$	1
$S'(t)$	-	0	+
$S(t)$	$\frac{1}{2}$	\searrow 極小 \nearrow	$\frac{1}{2}$

$$S\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^3 - \frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{1}{2} = \frac{4-6+27}{54} = \frac{25}{54}$$

$\triangle APQ$ の面積 $S(t)$ は

$$\text{最大値 } S(0) = S(1) = \frac{1}{2}, \quad \text{最小値 } S\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{25}{54} \quad (\text{答})$$

をとる。