

図チャレ 第194回 (2017年11月)

一辺の長さ1の正四面体OABCの辺OAを2:1に内分する点をD, 辺OBを1:2に内分する点をEとする。さらに, 辺BC上に点F, 辺CA上に点Gをとり, 四角形DEFGを含む平面が辺OCに平行になるようにする。

- (1) OCの中点をL, DGの中点をM, EFの中点をNとするとき, 三角形LMNの面積Sを求めよ。
 (2) 四角錐O-DEFGの体積Vを求めよ。

解答

$$\vec{OA} = \vec{a}, \quad \vec{OB} = \vec{b}, \quad \vec{OC} = \vec{c}$$

とおく。

- (1) 平面DEFGは辺OCに平行であるから

$$EF \parallel OC \parallel DG$$

$$BF : FC = BE : EO = 2 : 1$$

$$CG : GA = OD : DA = 2 : 1$$

L, M, NはそれぞれOC, DG, EFの中点であることより

$$\vec{OL} = \frac{1}{2}\vec{OC} = \frac{1}{2}\vec{c}$$

$$\vec{OM} = \frac{1}{2}(\vec{OD} + \vec{OG}) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\vec{a}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{c}\right) = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{c}$$

$$\vec{ON} = \frac{1}{2}(\vec{OE} + \vec{OF}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\vec{b}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{c}\right) = \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$$

であるから,

$$\vec{LM} = \vec{OM} - \vec{OL} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{c} = \frac{2}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{c}$$

$$\vec{LN} = \vec{ON} - \vec{OL} = \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{c} = \frac{1}{3}\vec{b} - \frac{1}{6}\vec{c}$$

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1, \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = 1 \times 1 \times \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \text{ より}$$

$$|\vec{LM}|^2 = \frac{4}{9}|\vec{a}|^2 - \frac{4}{9}\vec{a} \cdot \vec{c} + \frac{1}{9}|\vec{c}|^2 = \frac{4}{9} \times 1^2 - \frac{4}{9} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{9} \times 1^2 = \frac{1}{3}$$

$$|\vec{LN}|^2 = \frac{1}{9}|\vec{b}|^2 - \frac{1}{9}\vec{b} \cdot \vec{c} + \frac{1}{36}|\vec{c}|^2 = \frac{1}{9} \times 1^2 - \frac{1}{9} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{36} \times 1^2 = \frac{1}{12}$$

$$\begin{aligned} \vec{LM} \cdot \vec{LN} &= \frac{2}{9}\vec{a} \cdot \vec{b} - \frac{1}{9}\vec{a} \cdot \vec{c} - \frac{1}{9}\vec{b} \cdot \vec{c} + \frac{1}{18}|\vec{c}|^2 \\ &= \left(\frac{2}{9} - \frac{1}{9} - \frac{1}{9}\right) \times \frac{1}{2} + \frac{1}{18} \times 1^2 \\ &= \frac{1}{18} \end{aligned}$$

△LMNの面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{LM}|^2 |\overrightarrow{LN}|^2 - (\overrightarrow{LM} \cdot \overrightarrow{LN})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{3} \times \frac{1}{12} - \left(\frac{1}{18}\right)^2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{18} \sqrt{3^2 - 1} = \frac{\sqrt{2}}{18} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(2) 点 L から直線 MN におろした垂線の足を H とすると

$$LH \perp MN$$

であり, 平面 ABL と辺 OC は垂直である。さらに,

$$LH \perp OC \parallel DG \parallel EF$$

であるから, LH は平面 $DEFG$ と垂直である。

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} = \left(\frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}\right) - \left(\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{c}\right) \\ &= -\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{6}\vec{c} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} MN &= \frac{1}{6} | -4\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c} | \\ &= \frac{1}{6} \sqrt{16|\vec{a}|^2 + 4|\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 - 16\vec{a} \cdot \vec{b} + 4\vec{b} \cdot \vec{c} - 8\vec{c} \cdot \vec{a}} \\ &= \frac{1}{6} \sqrt{16 \times 1^2 + 4 \times 1^2 + 1^2 - 16 \times \frac{1}{2} + 4 \times \frac{1}{2} - 8 \times \frac{1}{2}} \\ &= \frac{\sqrt{11}}{6} \end{aligned}$$

LH の長さを h とすると, $S = \frac{1}{2} \cdot MN \cdot h$ より,

$$h = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{18} \times \frac{6}{\sqrt{11}} = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{11}}$$

台形 $DEFG$ の面積 T は

$$T = \frac{1}{2} \cdot (DG + EF) \cdot MN = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right) \times \frac{\sqrt{11}}{6} = \frac{\sqrt{11}}{12}$$

四角錐 $O-DEFG$ の体積 V は

$$V = \frac{1}{3} Th = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{11}}{12} \times \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{11}} = \frac{1}{9\sqrt{2}} \quad (\text{答})$$