

## 図チャレ 第195回(2017年12月)

円に内接する四角形 ABCD があり、辺 AB の点 A の側への延長と辺 CD の点 D の側への延長とが点 E で交わり、辺 AD の点 A の側への延長と辺 BC の点 B の側への延長とが点 F で交わるものとする。

- (1) 三角形 ADE の外接円と三角形 ABF の外接円は、線分 EF 上で交わることを示せ。
- (2) 四角形 ABCD の外接円に点 E, F から引いた接線の接点をそれぞれ T, U とするとき、 $ET^2 + FU^2 = EF^2$  が成り立つことを示せ。

解答

- (1) 四角形 ABCD は円に内接するから

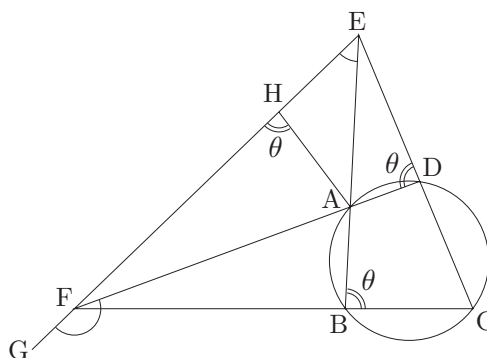
$$\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$$

$\theta = \angle ABC$  とおくと

$$\angle ABC = \angle ADE = \theta$$

$\angle ABC$  は  $\triangle BEF$  の頂点 B における外角であるから

$$\begin{aligned} \theta &= \angle BEF + \angle BFE \\ &> \angle BEF = \angle AEF \end{aligned}$$



線分 EF の点 F の側への延長上に点 G をとると、 $\angle DFG$  は  $\triangle DEF$  の頂点 F における外角であるから

$$\angle AFG = \angle DFG = \angle FDE + \angle FED > \angle FDE = \theta$$

線分 EF 上に動点 P をとり、P を E から F まで動かすとき

$$\angle APF \text{ は } \angle AEF (< \theta) \text{ から } \angle AFG (> \theta) \text{ まで連続的に変化}$$

するから、

$$\angle AHF = \theta \text{ となる点 H が線分 EF 上に存在}$$

する。このとき、

$$\angle ADE + \angle AHE = \theta + (180^\circ - \theta) = 180^\circ$$

より、

$$4 \text{ 点 } A, D, E, H \text{ は同一円周上}$$

にあり、

$$\angle ABF + \angle AHF = (180^\circ - \theta) + \theta = 180^\circ$$

より、

$$4 \text{ 点 } A, B, F, H \text{ は同一円周上}$$

にある。

三角形の外接円は一意に定まるので、 $\triangle ADE$  の外接円と  $\triangle ABF$  の外接円は、線分 EF 上の点 H で交わる。

(証明おわり)

(2) 四角形 ABCD,  $\triangle ADE$ ,  $\triangle ABF$  の外接円をそれぞれ  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  とおく。

点 E に関する円  $S_1$  の方べきについて

$$ET^2 = EA \cdot EB$$

点 E に関する円  $S_3$  の方べきについて

$$EA \cdot EB = EH \cdot EF$$

が成り立つから,

$$ET^2 = EH \cdot EF \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

点 F に関する円  $S_1$  および円  $S_2$  の方べきについて

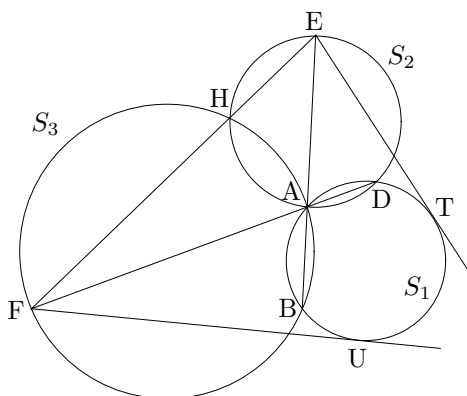
$$FU^2 = FA \cdot FD, \quad FA \cdot FD = FH \cdot FE$$

が成り立つから,

$$FU^2 = FH \cdot EF \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②の辺々を加えると

$$ET^2 + FU^2 = (EH + FH) \cdot EF = EF^2$$



(証明おわり)