

図チャレ 第197回 (2018年2月)

四面体 ABCD において, $AB = \sqrt{2}$, $AC = 2$, $AD = \sqrt{3}$, $\angle BAC = 45^\circ$, $\angle CAD = 30^\circ$ であり, さらに $\cos \angle BAD = \sqrt{3} \cos \angle BCD$ が成り立つとき, つぎの問いに答えよ。

- (1) 辺 BD の長さを求めよ。
- (2) 四面体 ABCD の表面積を求めよ。
- (3) 四面体 ABCD の体積を求めよ。

出典：2008年 法政大学 経営学部

解答

- (1) $AB = \sqrt{2}$, $AC = 2$, $\angle BAC = 45^\circ$ より

$$\angle ABC = 90^\circ, \quad BC = \sqrt{2}$$

$$AC = 2, \quad AD = \sqrt{3}, \quad \angle CAD = 30^\circ \text{ より}$$

$$\angle ADC = 90^\circ, \quad CD = 1$$

$\triangle ABD$ および $\triangle BCD$ に余弦定理をあてはめると

$$\cos \angle BAD = \frac{2 + 3 - BD^2}{2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}, \quad \cos \angle BCD = \frac{2 + 1 - BD^2}{2 \cdot \sqrt{2} \cdot 1}$$

であり, $\cos \angle BAD = \sqrt{3} \cos \angle BCD$ より

$$\frac{5 - BD^2}{2\sqrt{6}} = \sqrt{3} \cdot \frac{3 - BD^2}{2\sqrt{2}}$$

$$5 - BD^2 = 3(3 - BD^2) \quad \therefore BD = \sqrt{2} \quad (\text{答})$$

- (2) (1) より

$$\cos \angle BAD = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}, \quad \cos \angle BCD = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

であるから,

$$\sin \angle BAD = \sqrt{1 - \cos^2 \angle BAD} = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$$

$$\sin \angle BCD = \sqrt{1 - \cos^2 \angle BCD} = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}$$

四面体 ABCD の表面積は

$$\triangle ABC + \triangle ACD + \triangle ADB + \triangle BCD$$

$$= \frac{1}{2}(\sqrt{2})^2 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{3} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}$$

$$= 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{15}}{4} + \frac{\sqrt{7}}{4} \quad (\text{答})$$

(3) 辺 AC の中点を M とすると,

$$BM = DM = 1$$

であり, $AB = BD = \sqrt{2}$ より

$$\angle AMB = \angle BMD = 90^\circ$$

であるから,

$$BM \perp (\text{平面 AMD})$$

(平面 AMD は平面 ACD のことであるから,) 四面体 ABCD の体積 V は

$$V = \frac{1}{3} \cdot (\triangle ACD) \cdot BM = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 1 = \frac{\sqrt{3}}{6} \quad (\text{答})$$

(別法) ベクトルを用いると, 機械的に解くことができる。

(1) $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{d}$ とおくと

$$|\vec{b}| = \sqrt{2}, \quad |\vec{c}| = 2, \quad |\vec{d}| = \sqrt{3}$$

であるから,

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = \sqrt{2} \times 2 \times \cos 45^\circ = 2, \quad \vec{c} \cdot \vec{d} = 2 \times \sqrt{3} \times \cos 30^\circ = 3$$

$\cos \angle BAD = \sqrt{3} \cos \angle BCD$ より

$$\frac{\vec{b} \cdot \vec{d}}{|\vec{b}| |\vec{d}|} = \sqrt{3} \times \frac{(\vec{b} - \vec{c}) \cdot (\vec{d} - \vec{c})}{|\vec{b} - \vec{c}| |\vec{d} - \vec{c}|}$$

ここで,

$$\begin{aligned} (\vec{b} - \vec{c}) \cdot (\vec{d} - \vec{c}) &= \vec{b} \cdot \vec{d} - \vec{b} \cdot \vec{c} - \vec{c} \cdot \vec{d} + |\vec{c}|^2 \\ &= \vec{b} \cdot \vec{d} - 2 - 3 + 2^2 = \vec{b} \cdot \vec{d} - 1 \end{aligned}$$

$$|\vec{b} - \vec{c}| = \sqrt{|\vec{b}|^2 - 2\vec{b} \cdot \vec{c} + |\vec{c}|^2} = \sqrt{2 - 2 \times 2 + 2^2} = \sqrt{2}$$

$$|\vec{d} - \vec{c}| = \sqrt{|\vec{d}|^2 - 2\vec{c} \cdot \vec{d} + |\vec{c}|^2} = \sqrt{3 - 2 \times 3 + 2^2} = 1$$

であるから,

$$\frac{\vec{b} \cdot \vec{d}}{\sqrt{2}\sqrt{3}} = \sqrt{3} \times \frac{\vec{b} \cdot \vec{d} - 1}{\sqrt{2} \times 1} \quad \therefore \vec{b} \cdot \vec{d} = \frac{3}{2}$$

よって,

$$|\overrightarrow{BD}|^2 = |\vec{b} - \vec{d}|^2 = |\vec{b}|^2 - 2\vec{b} \cdot \vec{d} + |\vec{d}|^2 = 2 - 3 + 3 = 2$$

$$\therefore BD = \sqrt{2} \quad (\text{答})$$

(2) 三角形の面積公式を用いて

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{b}|^2 |\vec{c}|^2 - (\vec{b} \cdot \vec{c})^2} = \frac{1}{2} \sqrt{2 \times 4 - 2^2} = 1$$

$$\triangle ABD = \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{b}|^2 |\vec{d}|^2 - (\vec{b} \cdot \vec{d})^2} = \frac{1}{2} \sqrt{2 \times 3 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$\triangle ACD = \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{c}|^2 |\vec{d}|^2 - (\vec{c} \cdot \vec{d})^2} = \frac{1}{2} \sqrt{4 \times 3 - 3^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\begin{aligned} \triangle BCD &= \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{b} - \vec{c}|^2 |\vec{d} - \vec{c}|^2 - \{(\vec{b} - \vec{c}) \cdot (\vec{d} - \vec{c})\}^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{(\sqrt{2})^2 - \left(\frac{3}{2} - 1\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{7}}{4} \end{aligned}$$

よって,

$$\text{四面体 ABCD の表面積は } 1 + \frac{\sqrt{15}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{7}}{4} \quad (\text{答})$$

(3) 頂点 D から面 ABC に下ろした垂線の足を H とする。共面条件より

$$\overrightarrow{AH} = s\vec{b} + t\vec{c} \quad (s, t \text{ は実数}) \quad \dots\dots ①$$

と表され,

$$\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AD} = s\vec{b} + t\vec{c} - \vec{d}$$

は面 ABC と垂直であるから,

$$\begin{aligned} \vec{b} \cdot (s\vec{b} + t\vec{c} - \vec{d}) &= s|\vec{b}|^2 + t\vec{b} \cdot \vec{c} - \vec{b} \cdot \vec{d} \\ &= 2s + 2t - \frac{3}{2} = 0 \quad \dots\dots ② \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{c} \cdot (s\vec{b} + t\vec{c} - \vec{d}) &= s\vec{b} \cdot \vec{c} + t|\vec{c}|^2 - \vec{c} \cdot \vec{d} \\ &= 2s + 4t - 3 = 0 \quad \dots\dots ③ \end{aligned}$$

②かつ③より

$$s = 0, \quad t = \frac{3}{4}$$

①より

$$\overrightarrow{AH} = \frac{3}{4}\vec{c} \quad \therefore |\overrightarrow{AH}| = \frac{3}{4}|\vec{c}| = \frac{3}{2}$$

DH の長さを h とすると

$$h = \sqrt{|\vec{d}|^2 - |\overrightarrow{AH}|^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

であり, $\triangle ABC$ の面積を S , 四面体 ABCD の体積を V とすると,

$$V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6} \quad (\text{答})$$