

図チャレ 第198回(2018年3月)

座標空間において, O を原点とし, $A(2, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$, $C(1, 1, 0)$ とする. $\triangle OAB$ を直線 OC の周りに 1 回転してできる回転体を L とする. 以下の問に答えよ.

(1) 直線 OC 上にない点 $P(x, y, z)$ から直線 OC におろした垂線を PH とする. \overrightarrow{OH} と \overrightarrow{HP} を x, y, z の式で表せ.

(2) 点 $P(x, y, z)$ が L の点であるための条件は

$$z^2 \leq 2xy \text{ かつ } 0 \leq x + y \leq 2$$

であることを示せ.

(3) $1 \leq a \leq 2$ とする. L を平面 $x = a$ で切った切り口の面積 $S(a)$ を求めよ.

(4) 立体 $\{(x, y, z) \mid (x, y, z) \in L, 1 \leq x \leq 2\}$ の体積を求めよ.

出典: 2018 年 神戸大学

解答

(1) \overrightarrow{OH} は \overrightarrow{OP} の直線 OC への正射影であるから

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OH} &= \frac{\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OP}}{|\overrightarrow{OC}|^2} \overrightarrow{OC} \\ &= \frac{1 \cdot x + 1 \cdot y + 0 \cdot z}{1^2 + 1^2 + 0^2} (1, 1, 0) \\ &= \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}, 0 \right) \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{HP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OH} = \left(\frac{x-y}{2}, \frac{y-x}{2}, z \right) \quad (\text{答})$$

(2) $\angle COP = \theta$ とおくと,

$$\cos \theta = \frac{\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OP}}{|\overrightarrow{OC}| |\overrightarrow{OP}|} = \frac{x+y}{\sqrt{2} \sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$P \in L \iff 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \text{ かつ } x \geq 0 \text{ かつ } y \geq 0 \text{ かつ } x+y \leq 2$$

$x \geq 0, y \geq 0$ のもとで,

$$\begin{aligned} 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} &\iff \frac{x+y}{\sqrt{2} \sqrt{x^2+y^2+z^2}} \geq \cos \frac{\pi}{4} \\ &\iff x+y \geq \sqrt{x^2+y^2+z^2} \end{aligned}$$

$$\iff (x+y)^2 \geq x^2 + y^2 + z^2$$

$$\iff z^2 \leq 2xy$$

$$x \geq 0 \text{ かつ } y \geq 0 \iff x+y \geq 0 \text{ かつ } xy \geq 0$$

であるから,

$$P \in L \iff z^2 \leq 2xy \text{ かつ } 0 \leq x+y \leq 2$$

(証明おわり)

(3) 回転体 L の平面 $x = a$ ($1 \leq a \leq 2$) による切り口は

$$z^2 \leq 2ay \text{ かつ } 0 \leq a+y \leq 2$$

$$\therefore \frac{z^2}{2a} \leq y \leq 2-a$$

断面積 $S(a)$ は

$$\begin{aligned} S(a) &= \int_{-\sqrt{2a(2-a)}}^{\sqrt{2a(2-a)}} \left(2-a - \frac{z^2}{2a}\right) dz \\ &= -\frac{1}{2a} \int_{-\sqrt{2a(2-a)}}^{\sqrt{2a(2-a)}} \{z + \sqrt{2a(2-a)}\} \{z - \sqrt{2a(2-a)}\} dz \\ &= \frac{1}{2a} \cdot \frac{1}{6} \{\sqrt{2a(2-a)} + \sqrt{2a(2-a)}\}^3 \\ &= \frac{1}{12a} \cdot 16\sqrt{2} \{\sqrt{a(2-a)}\}^3 \\ &= \frac{4\sqrt{2}}{3} \sqrt{a} (2-a)^{\frac{3}{2}} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(4) $a = 2 \sin^2 \theta$ ($\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) で置換積分することにより, 求める立体の体積 V は

$$\begin{aligned} V &= \int_1^2 S(a) da \\ &= \frac{4\sqrt{2}}{3} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2} \sin \theta (2 \cos^2 \theta)^{\frac{3}{2}} (2 \sin^2 \theta)' d\theta \\ &= \frac{4\sqrt{2}}{3} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2} \sin \theta \cdot 2\sqrt{2} \cos^3 \theta \cdot 4 \sin \theta \cos \theta d\theta \\ &= \frac{64\sqrt{2}}{3} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta \cos^4 \theta d\theta \\ &= \frac{64\sqrt{2}}{3} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} \sin 2\theta\right)^2 \cdot \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta \\ &= \frac{8\sqrt{2}}{3} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 4\theta}{2} (1 + \cos 2\theta) d\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{4\sqrt{2}}{3} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \cos 2\theta - \cos 4\theta - \frac{\cos 6\theta + \cos 2\theta}{2} \right) d\theta \\
&= \frac{4\sqrt{2}}{3} \left[\theta + \frac{1}{4} \sin 2\theta - \frac{1}{4} \sin 4\theta - \frac{1}{12} \sin 6\theta \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{4\sqrt{2}}{3} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4} \sin \frac{\pi}{2} - 0 + \frac{1}{12} \sin \frac{3}{2}\pi \right) \\
&= \frac{4\sqrt{2}}{3} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{12} \right) \\
&= \frac{\sqrt{2}(3\pi - 4)}{9} \quad (\text{答})
\end{aligned}$$

(別法)

$$S(a) = \frac{4\sqrt{2}}{3}(2-a)\sqrt{a}\sqrt{2-a} = \frac{4\sqrt{2}}{3}(2-a)\sqrt{2a-a^2}$$

$$(2a-a^2)' = 2-2a = 2(1-a)$$

に着目できれば，求める立体の体積 V は

$$\begin{aligned}
V &= \int_1^2 S(a) da \\
&= \int_1^2 \frac{4\sqrt{2}}{3} \{ \sqrt{2a-a^2} + (1-a)\sqrt{2a-a^2} \} da \\
&= \frac{4\sqrt{2}}{3} \int_1^2 \sqrt{1-(a-1)^2} da + \frac{2\sqrt{2}}{3} \int_1^2 (2a-a^2)^{\frac{1}{2}} (2a-a^2)' da \\
&= \frac{4\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{2\sqrt{2}}{3} \left[\frac{2}{3} (2a-a^2)^{\frac{3}{2}} \right]_1^2 \\
&= \frac{\sqrt{2}}{3}\pi - \frac{4\sqrt{2}}{9} \quad (\text{答})
\end{aligned}$$

と計算できる。