

図チャレ 第199回(2018年4月)

以下の問いに答えよ。

- (1) 円に内接する四角形 ABCD において, $AC \cdot DB = AB \cdot DC + AD \cdot BC$ となることを証明せよ。
- (2) 辺の長さが 1 の正五角形の対角線の長さを求めよ。
- (3) $\cos 108^\circ$ の値を求めよ。
- (4) 辺の長さが 1 の正五角形 ABCDE において, 線分 BC の中点を M とする。 $\cos \angle MAD$ を求めよ。

出典: 2018 年 岐阜薬科大学

解答

- (1) $AB = a, BC = b, CD = c, DA = d, AC = x, BD = y$ とおく。

$\triangle ABC$ および $\triangle ACD$ に余弦定理を適用すると

$$\cos B = \frac{a^2 + b^2 - x^2}{2ab}, \quad \cos D = \frac{c^2 + d^2 - x^2}{2cd}$$

四角形 ABCD が円に内接することより $B + D = 180^\circ$ であるから, 補角の公式より

$$\begin{aligned} \cos B + \cos D &= 0 \\ cd(a^2 + b^2 - x^2) + ab(c^2 + d^2 - x^2) &= 0 \\ \therefore x^2 &= \frac{cd(a^2 + b^2) + ab(c^2 + d^2)}{ab + cd} \\ &= \frac{ac(ad + bc) + bd(bc + ad)}{ab + cd} \\ &= \frac{(ac + bd)(ad + bc)}{ab + cd} \quad \dots\dots ① \end{aligned}$$

$\triangle ABD$ および $\triangle BCD$ に余弦定理を適用すると

$$\cos A = \frac{a^2 + d^2 - y^2}{2ad}, \quad \cos C = \frac{b^2 + c^2 - y^2}{2bc}$$

x と同様にして (b と d を入れ替えるだけでよいことになって)

$$y^2 = \frac{(ac + bd)(ab + cd)}{ad + bc} \quad \dots\dots ②$$

①かつ②より

$$x^2 y^2 = (ac + bd)^2 \quad \therefore xy = ac + bd$$

したがって, $AC \cdot DB = AB \cdot DC + AD \cdot BC$ が成り立つ。

(証明おわり)

(別解) 円周角の性質より

$$\angle BAC = \angle BDC$$

であることを考えて、対角線 BD 上で

$$AB : AC = DE : DC \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

を満たす点 E を定めると、

$$\triangle ABC \sim \triangle DEC$$

特に、

$$\angle ACB = \angle DCE$$

$\angle ACE$ を共通として

$$\angle ECB = \angle DCA$$

円周角の性質より

$$\angle DBC = \angle EBC = \angle DAC$$

であるから、

$$\triangle EBC \sim \triangle DAC$$

特に、

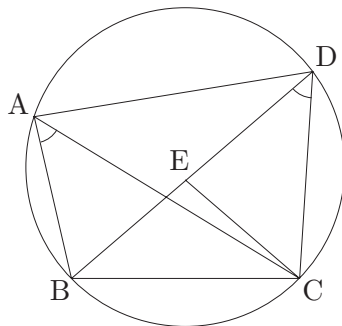
$$BE : BC = AD : AC \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

$\textcircled{3}$ 、 $\textcircled{4}$ より

$$DB = DE + BE = \frac{AB \cdot DC}{AC} + \frac{AD \cdot BC}{AC}$$

$$\therefore AC \cdot DB = AB \cdot DC + AD \cdot BC$$

(証明おわり)



(2) 正五角形 ABCDE に対して

$$AC = AD = BD$$

であり、この長さを z とおく。

四角形 ABCD に (1) の等式 (トレミーの定理) を適用すると

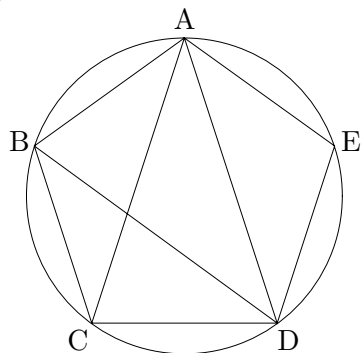
$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$$

$$z^2 = 1^2 + z \cdot 1$$

$$z^2 - z - 1 = 0$$

$z > 0$ を考えて、対角線の長さ z は

$$z = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad (\text{答})$$



(3) 正五角形 ABCDE において

$$\angle ABC = 108^\circ$$

であるから、 $\triangle ABC$ において余弦定理を適用して、

(2) を用いると

$$\cos 108^\circ = \frac{1^2 + 1^2 - z^2}{2 \cdot 1 \cdot 1} = \frac{2 - (z + 1)}{2} = \frac{1 - z}{2} = \frac{1 - \sqrt{5}}{4} \quad (\text{答})$$

(4) $\triangle ABM$ において余弦定理より

$$\begin{aligned} AM^2 &= 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 \times 1 \times \frac{1}{2} \times \cos 108^\circ \\ &= 1 + \frac{1}{4} - \frac{1 - \sqrt{5}}{4} \\ &= \frac{4 + \sqrt{5}}{4} \\ \therefore AM &= \frac{\sqrt{4 + \sqrt{5}}}{2} \end{aligned}$$

$AM = DM$ であることに注意すると, AD の中点を N として

$$\angle ANM = 90^\circ$$

であるから, 直角三角形 MAN において

$$\begin{aligned} \cos \angle MAD &= \cos \angle MAN \\ &= \frac{AN}{AM} \\ &= \frac{z}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{4 + \sqrt{5}}} \\ &= \frac{1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{4 + \sqrt{5}}} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

