

図チャレ 第 200 回 (2018 年 5 月)

複素数平面上の 4 点 $A(\alpha)$, $B(\beta)$, $C(\gamma)$, $D(\delta)$ を頂点とする四角形 ABCD を考える。ただし, 四角形 ABCD は, すべての内角が 180° より小さい四角形 (凸四角形) であるとする。また, 四角形 ABCD の頂点は反時計回りに A, B, C, D の順に並んでいるとする。四角形 ABCD の外側に, 4 辺 AB, BC, CD, DA をそれぞれ斜辺とする直角二等辺三角形 APB, BQC, CRD, DSA を作る。次の問いに答えよ。

- (1) 点 P を表す複素数を求めよ。
- (2) 四角形 PQRS が平行四辺形であるための必要十分条件は, 四角形 ABCD がどのような四角形であることが答えよ。
- (3) 四角形 PQRS が平行四辺形であるならば, 四角形 PQRS は正方形であることを示せ。

出典 : 2018 年 広島大学

解答

- (1) 点 P を表す複素数を p とする。AB を斜辺とする直角二等辺三角形 PAB は, P, A, B の順に時計回りに並ぶから,

$$\begin{aligned} p - \alpha &= (\beta - \alpha) \times \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right\} \\ &= \frac{1-i}{2} (\beta - \alpha) \\ \therefore p &= \frac{1+i}{2} \alpha + \frac{1-i}{2} \beta \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

- (2) $Q(q)$, $R(r)$, $S(s)$ とすると, (1) と同様に考えて

$$\begin{aligned} q &= \frac{1+i}{2} \beta + \frac{1-i}{2} \gamma \\ r &= \frac{1+i}{2} \gamma + \frac{1-i}{2} \delta \\ s &= \frac{1+i}{2} \delta + \frac{1-i}{2} \alpha \end{aligned}$$

四角形 PQRS が平行四辺形であるための条件は

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$$

であり、

$$q - p = r - s$$

$$-\frac{1+i}{2}\alpha + i\beta + \frac{1-i}{2}\gamma = \frac{1+i}{2}\gamma - i\delta - \frac{1-i}{2}\alpha$$

$$-i\alpha + i\beta = i\gamma - \delta$$

$$\beta - \alpha = \gamma - \delta \quad \therefore \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$$

よって、四角形 PQRS が平行四辺形であるための必要十分条件は

四角形 ABCD が平行四辺形 (答)

となることである。

(3) 四角形 PQRS が平行四辺形ならば、(2)より

$$\beta - \alpha = \gamma - \delta$$

が成り立つから、

$$\begin{aligned} s - p &= -i\alpha - \frac{1-i}{2}\beta + \frac{1+i}{2}\delta \\ &= -i\alpha - \frac{1-i}{2}\beta + \frac{1+i}{2}(\alpha - \beta + \gamma) \\ &= \frac{1-i}{2}\alpha - \beta + \frac{1+i}{2}\gamma \\ &= i\left(\frac{-1-i}{2}\alpha + i\beta + \frac{1-i}{2}\gamma\right) \\ &= i(q - p) \end{aligned}$$

であり、

$$PQ = PS, \quad PQ \perp PS$$

が成り立つから、平行四辺形 PQRS は正方形である。

(証明終わり)

(初等幾何による解法)

(2)より、四角形 PQRS が平行四辺形ならば、四角形 ABCD も平行四辺形で

$$\angle ABC + \angle BCD = 180^\circ$$

であり、特に

$$\angle ABC \leq 90^\circ \text{ または } \angle BCD \leq 90^\circ$$

であるが、

$$\angle ABC \leq 90^\circ \text{ のとき示せば十分}$$

である。

$\triangle APB$, $\triangle BQC$, $\triangle CRD$ がいずれも直角二等辺三角形であることに注意すると、

点 B は平行四辺形 PQRS の外部、点 C は内部

($\angle ABC = 90^\circ$ のとき 2 点 B, C はともに辺上)

にある。

$\triangle PBQ$ と $\triangle RCQ$ について

$$PB = \frac{1}{\sqrt{2}}AB = \frac{1}{\sqrt{2}}CD = RC$$

$$BQ = \frac{1}{\sqrt{2}}BC = CQ$$

であり,

$$\angle PBQ = \angle ABC + \angle PBA + \angle PBQ = \angle ABC + 45^\circ + 45^\circ$$

$$\begin{aligned}\angle RCQ &= 360^\circ - (\angle BCD + \angle QCB + \angle RCD) \\ &= 360^\circ - \{(180^\circ - \angle ABC) + 45^\circ + 45^\circ\}\end{aligned}$$

より

$$\angle PBQ = \angle RCQ = \angle ABC + 90^\circ$$

が成り立つから,

$$\triangle PBQ \equiv \triangle RCQ$$

したがって,

$$PQ = RQ$$

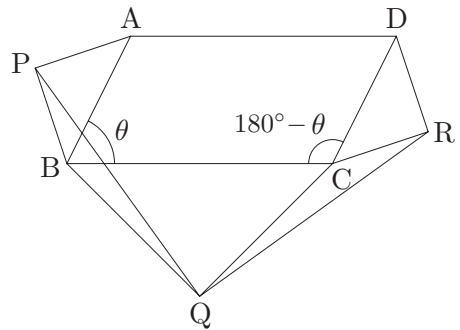
であり,

$$\angle PQB = \angle RQC, \quad \angle BQC = 90^\circ$$

より

$$\angle PQR = 90^\circ$$

であるから, 平行四辺形 PQRS は正方形である。



(証明おわり)