

## 図チャレ 第 201 回 (2018 年 6 月)

座標空間の原点  $O$  を中心とする半径 1 の球面を  $S$  とし, 2 点  $A(6, 0, 0)$ ,  $B(3, -6, -6)$  を通る直線を  $\ell$  とする. また,  $A$  を頂点とし, 底面の中心が  $\ell$  上にある直円錐  $C$  に,  $S$  が 2 点  $P, Q$  でのみ内接しているとする. ただし,  $P$  は  $C$  の底面上にあるとする.

(1)  $S$  上の点と  $\ell$  上の点を結ぶ線分の長さの最小値を求めよ.

(2)  $P, Q$  の座標をそれぞれ求めよ.

(3)  $C$  の体積を求めよ.

出典: 2018 年 慶應義塾大学 経済学部

解答

(1)  $\vec{AB} = (3, -6, -6) - (6, 0, 0) = (-3, -6, -6) = -3(1, 2, 2)$

原点  $O$  から  $\ell$  におろした垂線の足を  $H$  とすると,  $\ell$  上の点として

$$\vec{OH} = \vec{OA} + t\vec{AB} \quad (t \text{ は実数}) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

と表され,  $OH \perp \ell$  より

$$\vec{OH} \cdot \vec{AB} = \vec{OA} \cdot \vec{AB} + t|\vec{AB}|^2 = 0$$

$$\therefore t = -\frac{\vec{OA} \cdot \vec{AB}}{|\vec{AB}|^2} = -\frac{6 \times (-3) + 0 \times (-6) + 0 \times (-6)}{(-3)^2 + (-6)^2 + (-6)^2} = \frac{2}{9}$$

これを  $\textcircled{1}$  に代入すると,

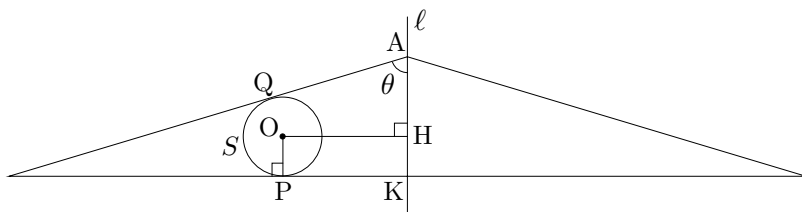
$$\vec{OH} = (6, 0, 0) + \frac{2}{9}(-3, -6, -6) = \left(\frac{16}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}\right)$$

$$|\vec{OH}| = \frac{4}{3}\sqrt{4^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = 4\sqrt{2}$$

$S$  上の点と  $\ell$  上の点を結ぶ線分の長さの最小値は

$$|\vec{OH}| - (S \text{ の半径}) = 4\sqrt{2} - 1 \quad (\text{答})$$

(2) 平面  $OAH$  による断面は次図のようになる。



(1) の考察より

$$\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OA} = \frac{2}{9}\overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}(-1, -2, -2)$$

P は半径 1 の球面  $S$  と直円錐  $C$  の底面との接点であるから,  $\overrightarrow{OP}$  は  $\overrightarrow{AH}$  と同じ向きの単位ベクトルであり,

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{\sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + (-2)^2}}(-1, -2, -2) = \frac{1}{3}(-1, -2, -2)$$

点 P の座標は

$$P\left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right) \quad (\text{答})$$

点 Q は平面 OAP 上にあり, 位置関係を考えて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OQ} &= \frac{\alpha}{6}\overrightarrow{OA} + 3\beta\overrightarrow{OP} \quad (\alpha < 0, \beta < 0) \\ &= \alpha(1, 0, 0) + \beta(-1, -2, -2) \\ &= (\alpha - \beta, -2\beta, -2\beta) \quad \dots\dots ②\end{aligned}$$

と表され,  $S$  上にあることより

$$\begin{aligned}(\alpha - \beta)^2 + (-2\beta)^2 + (-2\beta)^2 &= 1 \\ \therefore \alpha^2 - 2\alpha\beta + 9\beta^2 &= 1 \quad \dots\dots ③\end{aligned}$$

OQ  $\perp$  AQ より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{AQ} &= \overrightarrow{OQ} \cdot (\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OA}) = 0 \\ \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OQ} &= |\overrightarrow{OQ}|^2 \\ 6(\alpha - \beta) &= 1 \quad \therefore \alpha - \beta = \frac{1}{6} \quad \dots\dots ④\end{aligned}$$

③かつ④より  $\alpha$  を消去すると

$$\begin{aligned}\left(\beta + \frac{1}{6}\right)^2 - 2\beta\left(\beta + \frac{1}{6}\right) + 9\beta^2 &= 1 \\ 8\beta^2 = \frac{35}{36} \quad \therefore (2\beta)^2 &= \frac{35}{72}\end{aligned}$$

$\beta < 0$  より

$$-2\beta = \sqrt{\frac{35}{72}} = \frac{\sqrt{70}}{12} \quad \dots\dots ⑤$$

②, ④, ⑤より, 点 Q の座標は

$$Q\left(\frac{1}{6}, \frac{\sqrt{70}}{12}, \frac{\sqrt{70}}{12}\right) \quad (\text{答})$$

(3)  $C$  の底面の円の中心を  $K$  とすると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AK} &= \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HK} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{OP} = (-1, -2, -2) \\ \overrightarrow{AQ} &= \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OA} = \left(-\frac{35}{6}, \frac{\sqrt{70}}{12}, \frac{\sqrt{70}}{12}\right) = -\frac{1}{12}(70, -\sqrt{70}, -\sqrt{70}) \\ |\overrightarrow{AK}| &= \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + (-2)^2} = 3\end{aligned}$$

$$|\overrightarrow{AQ}| = \sqrt{OA^2 - OQ^2} = \sqrt{6^2 - 1^2} = \sqrt{35}$$

$$\overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{AQ} = \frac{1}{12} (70 \times 1 - \sqrt{70} \times 2 - \sqrt{70} \times 2) = \frac{35 - 2\sqrt{70}}{6}$$

$\angle KAQ = \theta$  とおくと

$$\cos \theta = \frac{\overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{AQ}}{|\overrightarrow{AK}| |\overrightarrow{AQ}|} = \frac{\sqrt{35} - 2\sqrt{2}}{18}$$

$$\begin{aligned} \tan^2 \theta &= \frac{1}{\cos^2 \theta} - 1 = \frac{18^2 - (\sqrt{35} - 2\sqrt{2})^2}{(\sqrt{35} - 2\sqrt{2})^2} \\ &= \frac{281 + 2\sqrt{280}}{(\sqrt{35} - 2\sqrt{2})^2} \\ &= \left( \frac{1 + \sqrt{280}}{\sqrt{35} - 2\sqrt{2}} \right)^2 \end{aligned}$$

$0^\circ < \theta < 90^\circ$  より  $\tan \theta > 0$  であるから,

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \frac{1 + 2\sqrt{70}}{\sqrt{35} - 2\sqrt{2}} \\ &= \frac{(1 + 2\sqrt{70})(\sqrt{35} + 2\sqrt{2})}{35 - 8} \\ &= \frac{9\sqrt{35} + 72\sqrt{2}}{27} \\ &= \frac{\sqrt{35} + 8\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

$C$  の体積  $V$  は

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi (3 \tan \theta)^2 \cdot 3 = (\sqrt{35} + 8\sqrt{2})^2 \pi = (163 + 16\sqrt{70}) \pi \quad (\text{答})$$

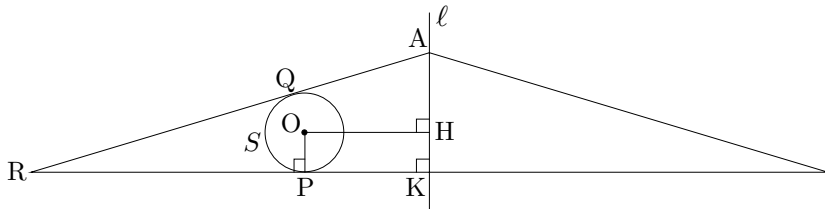
(別解) (2), (3) は次のように解くこともできる。

(2) 点  $P$  の座標を求めるところまでは同じ。

直角三角形  $OAQ$  において三平方の定理より

$$AQ = \sqrt{OA^2 - OQ^2} = \sqrt{6^2 - 1^2} = \sqrt{35}$$

$C$  の底面の円の中心を  $K$  とし, 直線  $KP$  と直線  $AQ$  の交点を  $R$  とする。



$$RP = RQ = a$$

とおき, 直角三角形  $ARK$  に三平方の定理を適用すると

$$\begin{aligned}
AR^2 &= RK^2 + AK^2 \\
(\sqrt{35} + a)^2 &= (a + 4\sqrt{2})^2 + (2 + 1)^2 \\
2(\sqrt{35} - 4\sqrt{2})a &= -35 + 32 + 9 \\
\therefore a &= \frac{3}{\sqrt{35} - 4\sqrt{2}} = \sqrt{35} + 4\sqrt{2}
\end{aligned}$$

$\angle AKR = 90^\circ$  に注目して,  $\overrightarrow{AQ}$  を  $\overrightarrow{AK}$  と  $\overrightarrow{HO}$  で表すことを考えると,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AQ} &= \frac{\sqrt{35}}{\sqrt{35} + a} (\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KR}) \\
&= \frac{\sqrt{35}}{2(\sqrt{35} + 2\sqrt{2})} \left( \overrightarrow{AK} + \frac{a + 4\sqrt{2}}{4\sqrt{2}} \overrightarrow{HO} \right) \\
&= \frac{\sqrt{35}}{2(\sqrt{35} + 2\sqrt{2})} \left\{ (-1, -2, -2) + \frac{\sqrt{35} + 8\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} (-4, 1, 1) \right\} \\
&= \frac{\sqrt{35}}{2(\sqrt{35} + 2\sqrt{2})} \cdot \frac{1}{3\sqrt{2}} (-35\sqrt{2} - 4\sqrt{35}, \sqrt{35} + 2\sqrt{2}, \sqrt{35} + 2\sqrt{2}) \\
&= \frac{\sqrt{35}}{6\sqrt{2}} (-\sqrt{70}, 1, 1) \\
&= \left( -\frac{35}{6}, \frac{\sqrt{70}}{12}, \frac{\sqrt{70}}{12} \right)
\end{aligned}$$

$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AQ}$  より, 点 Q の座標は

$$Q\left(\frac{1}{6}, \frac{\sqrt{70}}{12}, \frac{\sqrt{70}}{12}\right) \quad (\text{答})$$

(3) C の体積 V は

$$\begin{aligned}
V &= \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot RK^2 \cdot AK \\
&= \frac{\pi}{3} \times (\sqrt{35} + 8\sqrt{2})^2 \times 3 \\
&= (163 + 16\sqrt{70})\pi \quad (\text{答})
\end{aligned}$$