

図チャレ 第202回(2018年7月)

点 $P(0, t)$ ($t > 0$) から楕円 $E: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ に 2 本の法線が引けるとき, 楕円 E との交点(直交する接線の接点)を A, B とする。 $\triangle PAB$ の面積 $S(t)$ の最大値を求めよ。

解答

楕円 E は y 軸に関して対称であるから, 必要ならば, x 軸に関する対称性を考えて $t > -1$ とすることにより,

$$A(2\alpha, -\sqrt{1-\alpha^2}), B(-2\alpha, -\sqrt{1-\alpha^2}) \quad (0 < \alpha < 1)$$

としてよい。点 A における楕円 E の接線の方程式は

$$\frac{\alpha}{2}x - \sqrt{1-\alpha^2}y = 1$$

点 A における楕円 E の法線

$$\sqrt{1-\alpha^2}(x-2\alpha) + \frac{\alpha}{2}(y+\sqrt{1-\alpha^2}) = 0$$

は点 $P(0, t)$ を通るから,

$$\sqrt{1-\alpha^2}(0-2\alpha) + \frac{\alpha}{2}(t+\sqrt{1-\alpha^2}) = 0$$

$$\frac{\alpha}{2}t = \left(2\alpha - \frac{\alpha}{2}\right)\sqrt{1-\alpha^2}$$

$$\therefore t = 3\sqrt{1-\alpha^2}$$

$\triangle PAB$ も y 軸に関して対称となることを考え, $\triangle PAB$ の面積 $S(t)$ は

$$\begin{aligned} S(t) &= \frac{1}{2} \cdot 4\alpha \cdot (t + \sqrt{1-\alpha^2}) \\ &= 2\alpha(3\sqrt{1-\alpha^2} + \sqrt{1-\alpha^2}) \\ &= 8\alpha\sqrt{1-\alpha^2} \end{aligned}$$

$f(\alpha) = 8\alpha\sqrt{1-\alpha^2}$ ($0 < \alpha < 1$) とおくと,

$$\begin{aligned} f'(\alpha) &= 8 \left\{ 1 \cdot \sqrt{1-\alpha^2} + \alpha \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-\alpha^2}}(-2\alpha) \right\} \\ &= \frac{8}{\sqrt{1-\alpha^2}}(1-\alpha^2-\alpha^2) \\ &= \frac{-16}{\sqrt{1-\alpha^2}}\left(\alpha^2 - \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{-16}{\sqrt{1-\alpha^2}}\left(\alpha + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\alpha - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \end{aligned}$$

| | | | |
|--------------|-----|----------------------|-----|
| α | (0) | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | (1) |
| $f'(\alpha)$ | + | 0 | - |
| $f(\alpha)$ | | ↗ 極大 ↘ | |

$S(t) = f(\alpha)$ の最大値は

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 8 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{2}} = 4 \quad (\text{答})$$

(注) $t = 3\sqrt{1 - \alpha^2} > 0$ により, 点 A, B における楕円 E の法線が $y \leq 0$ で y 軸と交わることはないことがわかる。