

図チャレ 第204回(2018年9月)

複素数平面上に三角形 OAB があり, 頂点 O, A, B を表す複素数をそれぞれ $0, \alpha, \beta$ とする。

- (1) 点 A から直線 OB へ下ろした垂線の足を H とするとき, 点 H を表す複素数 γ を $\alpha, \bar{\alpha}, \beta, \bar{\beta}$ を用いて表せ。
- (2) 三角形 OAB の外心 D を表す複素数 δ を $\alpha, \bar{\alpha}, \beta, \bar{\beta}$ を用いて表せ。
- (3) 直線 AH と三角形 OAB の外接円との交点のうち点 A でない方を E とするとき, 点 E を表す複素数 ε を $\alpha, \bar{\alpha}, \beta, \bar{\beta}$ を用いて表せ。

解答

- (1) 点 H(γ) は直線 OB 上にあるから

$$\gamma = k\beta \quad (k \text{ は実数})$$

と表される。

$$\gamma - \alpha = k\beta - \alpha \perp \beta$$

より

$$\begin{aligned} \overline{\left(\frac{k\beta - \alpha}{\beta}\right)} &= -\frac{k\beta - \alpha}{\beta} \\ \beta(k\bar{\beta} - \bar{\alpha}) &= -\bar{\beta}(k\beta - \alpha) \\ 2\beta\bar{\beta}k &= \bar{\alpha}\beta + \alpha\bar{\beta} \\ \therefore k &= \frac{\bar{\alpha}\beta + \alpha\bar{\beta}}{2\beta\bar{\beta}} \end{aligned}$$

点 H を表す複素数 γ は

$$\gamma = \frac{\bar{\alpha}\beta + \alpha\bar{\beta}}{2\beta\bar{\beta}}\beta = \frac{1}{2}\left(\frac{\bar{\alpha}\beta}{\bar{\beta}} + \alpha\right) \quad (\text{答})$$

- (2) $|\alpha - \delta| = |0 - \delta|$ より

$$|\alpha - \delta|^2 = |\delta|^2$$

$$(\alpha - \delta)(\bar{\alpha} - \bar{\delta}) = \delta\bar{\delta}$$

$$\therefore \bar{\alpha}\delta + \alpha\bar{\delta} = \alpha\bar{\alpha} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

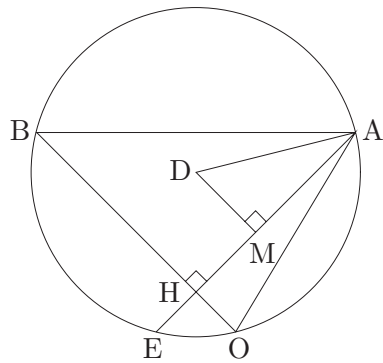
同様に, $|\beta - \delta| = |0 - \delta|$ より

$$\bar{\beta}\delta + \beta\bar{\delta} = \beta\bar{\beta} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

① $\times \beta -$ ② $\times \alpha$ により $\bar{\delta}$ を消去して

$$(\bar{\alpha}\beta - \alpha\bar{\beta})\delta = \alpha\bar{\alpha}\beta - \alpha\beta\bar{\beta}$$

$$\therefore \delta = \frac{\alpha\bar{\alpha}\beta - \alpha\beta\bar{\beta}}{\bar{\alpha}\beta - \alpha\bar{\beta}} \quad (\text{答})$$



(3) AE の中点を M とすると, \overrightarrow{AM} は \overrightarrow{AD} の直線 AH への正射影であるから, (1) において $\gamma \mapsto \frac{1}{2}(\varepsilon - \alpha)$, $\alpha \mapsto \delta - \alpha$, $\beta \mapsto \gamma - \alpha$ とすることにより

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \alpha + 2 \cdot \frac{(\bar{\delta} - \bar{\alpha})(\gamma - \alpha) + (\delta - \alpha)(\bar{\gamma} - \bar{\alpha})}{2(\gamma - \alpha)(\bar{\gamma} - \bar{\alpha})}(\gamma - \alpha) \\ &= \alpha + (\bar{\delta} - \bar{\alpha})\frac{\gamma - \alpha}{\bar{\gamma} - \bar{\alpha}} + (\delta - \alpha) \\ &= \delta + (\bar{\delta} - \bar{\alpha})\frac{\gamma - \alpha}{\bar{\gamma} - \bar{\alpha}}\end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned}\bar{\delta} - \bar{\alpha} &= \frac{\bar{\alpha}\alpha\bar{\beta} - \bar{\alpha}\bar{\beta}\beta - \bar{\alpha}(\alpha\bar{\beta} - \bar{\alpha}\beta)}{\alpha\bar{\beta} - \bar{\alpha}\beta} = \frac{\bar{\alpha}\beta(\bar{\alpha} - \bar{\beta})}{\alpha\bar{\beta} - \bar{\alpha}\beta} \\ \gamma - \alpha &= \frac{\bar{\alpha}\beta + \alpha\bar{\beta} - 2\alpha\bar{\beta}}{2\bar{\beta}} = \frac{\bar{\alpha}\beta - \alpha\bar{\beta}}{2\bar{\beta}} \\ \frac{\gamma - \alpha}{\bar{\gamma} - \bar{\alpha}} &= -\frac{\beta}{\bar{\beta}}\end{aligned}$$

であるから, (2)の結果も用いて,

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \frac{\alpha\bar{\alpha}\beta - \alpha\bar{\beta}\bar{\beta}}{\bar{\alpha}\beta - \alpha\bar{\beta}} - \frac{\beta}{\bar{\beta}} \cdot \frac{\bar{\alpha}\beta(\bar{\alpha} - \bar{\beta})}{\alpha\bar{\beta} - \bar{\alpha}\beta} \\ &= \frac{\bar{\beta}(\alpha\bar{\alpha}\beta - \alpha\bar{\beta}\bar{\beta}) + \bar{\alpha}\beta^2(\bar{\alpha} - \bar{\beta})}{\bar{\beta}(\bar{\alpha}\beta - \alpha\bar{\beta})} \\ &= \frac{\beta(\bar{\alpha}\beta + \alpha\bar{\beta})(\bar{\alpha} - \bar{\beta})}{\bar{\beta}(\bar{\alpha}\beta - \alpha\bar{\beta})} \quad (\text{答})\end{aligned}$$