

## 図チャレ 第206回(2018年11月)

楕円  $E: \frac{(x - \frac{28}{5})^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  と双曲線  $H: \frac{x^2}{16} - y^2 = 1$  は点  $(5, \frac{3}{4})$  で接するものとする。ただし,  $a > 0, b > 0$  である。

- (1) 正の定数  $a, b$  の値を求めよ。
- (2)  $E$  の内部で  $x \leq 5$  の部分の面積  $S$  を求めよ。

解答

- (1) 楕円  $E$  は点  $(5, \frac{3}{4})$  を通るから

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^2} \left(5 - \frac{28}{5}\right)^2 + \frac{1}{b^2} \left(\frac{3}{4}\right)^2 &= 1 \\ \therefore \frac{9}{25} \cdot \frac{1}{a^2} + \frac{9}{16} \cdot \frac{1}{b^2} &= 1 \quad \dots\dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

点  $(5, \frac{3}{4})$  における双曲線  $H$  の接線の方程式は

$$\frac{5}{16}x - \frac{3}{4}y = 1$$

点  $(5, \frac{3}{4})$  における楕円  $E$  の接線の方程式は

$$\begin{aligned} \frac{5 - \frac{28}{5}}{a^2} \left(x - \frac{28}{5}\right) + \frac{1}{b^2} \cdot \frac{3}{4}y &= 1 \\ \frac{1}{a^2} \left(x - \frac{28}{5}\right) - \frac{5}{4b^2}y &= -\frac{5}{3} \quad \therefore \frac{1}{a^2}x - \frac{5}{4b^2}y = \frac{28}{5a^2} - \frac{5}{3} \end{aligned}$$

2 接線が同一直線であることより

$$\begin{cases} \frac{1}{a^2} = \frac{5}{16} \left(\frac{28}{5a^2} - \frac{5}{3}\right) & \dots\dots \textcircled{2} \\ \frac{5}{4b^2} = \frac{3}{4} \left(\frac{28}{5a^2} - \frac{5}{3}\right) & \dots\dots \textcircled{3} \end{cases}$$

②より

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^2} &= \frac{7}{4a^2} - \frac{25}{48} \\ \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{a^2} &= \frac{25}{48} \\ \therefore a^2 &= \frac{3}{4} \cdot \frac{48}{25} = \frac{36}{25} \end{aligned}$$

③より

$$\frac{5}{4b^2} = \frac{21}{5} \cdot \frac{25}{36} - \frac{5}{4} = \frac{35-15}{12} = \frac{5}{3} \quad \therefore b^2 = \frac{3}{4}$$

$a^2 = \frac{36}{25}$ ,  $b^2 = \frac{3}{4}$  は ① も満たすから, 求める正の実数は

$$a = \frac{6}{5}, b = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (\text{答})$$

(2)  $E$  の内部で  $x \leq 5$  の部分は

弓形  $\left(x - \frac{28}{5}\right)^2 + y^2 \leq \left(\frac{6}{5}\right)^2$ ,  $x \leq 5$  を  $y$  軸方向にのみ  $\frac{5}{6} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$  倍

したものであるから, 求める面積  $S$  は

$$\begin{aligned} S &= \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{6}{5}\right)^2 \cdot \frac{2}{3}\pi - \frac{1}{2} \left(\frac{6}{5}\right)^2 \sin \frac{2}{3}\pi \right\} \times \frac{5\sqrt{3}}{12} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{36}{25} \cdot \frac{5\sqrt{3}}{12} \left( \frac{2}{3}\pi - \sin \frac{2}{3}\pi \right) \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{10} \left( \frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \quad (\text{答}) \end{aligned}$$