

図チャレ 第 207 回 (2018 年 12 月)

一辺の長さが 1 である正四面体 ABCD の辺 AB を 1 : 2 に内分する点を P, 辺 BC の中点を M, 辺 AD の中点を N とする。

- (1) 辺 CD 上に点 Q をとり, 直線 PQ と直線 MN が交わるとき, \overrightarrow{AQ} を \overrightarrow{AC} , \overrightarrow{AD} を用いて表せ。
- (2) 内積 $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{PQ}$ の値を求めよ。
- (3) 四角形 PMQN の面積 S を求めよ。

解答

$$\overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AC} = \vec{c}, \overrightarrow{AD} = \vec{d} \text{ とおくと,}$$

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\vec{b}, \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}, \overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\vec{d}$$

$$|\vec{b}| = |\vec{c}| = |\vec{d}| = 1, \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{d} = \vec{d} \cdot \vec{b} = 1^2 \times \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

- (1) 直線 PQ と直線 MN が交わるとき, 4 点 P, Q, M, N は同一平面上にあるから,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AQ} &= \overrightarrow{AP} + s\overrightarrow{PM} + t\overrightarrow{PN} \quad (s, t \text{ は実数}) \\ &= \frac{1}{3}\vec{b} + s\left(\frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} - \frac{1}{3}\vec{b}\right) + t\left(\frac{1}{2}\vec{d} - \frac{1}{3}\vec{b}\right) \\ &= \left(\frac{1}{3} + \frac{s}{6} - \frac{t}{3}\right)\vec{b} + \frac{s}{2}\vec{c} + \frac{t}{2}\vec{d} \quad \dots\dots (*) \end{aligned}$$

と表される。点 Q は線分 CD 上にあるから, $\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ が 1 次独立であることより

$$\frac{1}{3} + \frac{s}{6} - \frac{t}{3} = 0 \quad \text{かつ} \quad \frac{s}{2} + \frac{t}{2} = 1 \quad \text{かつ} \quad \frac{s}{2} \geq 0 \quad \text{かつ} \quad \frac{t}{2} \geq 0$$

s を消去すると

$$\frac{1}{3} + \frac{2-t}{6} - \frac{1}{3}t = 0 \quad \text{かつ} \quad 2-t \geq 0 \quad \text{かつ} \quad t \geq 0$$

$$\therefore t = \frac{4}{3}, \quad s = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$$

(*) に代入して

$$\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} \quad (\text{答})$$

- (2)

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(-\vec{b} - \vec{c} + \vec{d})$$

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}(-\vec{b} + \vec{c} + 2\vec{d})$$

$$\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{PQ} = \frac{1}{6}(-\vec{b} - \vec{c} + \vec{d}) \cdot (-\vec{b} + \vec{c} + 2\vec{d})$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{6} (|\vec{b}|^2 - |\vec{c}|^2 + 2|\vec{d}|^2 - 3\vec{b} \cdot \vec{d} - \vec{c} \cdot \vec{d}) \\
&= \frac{1}{6} \times \left(1^2 - 1^2 + 2 \times 1^2 - 3 \times \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) \\
&= 0 \quad (\text{答})
\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}
|\overrightarrow{MN}| &= \frac{1}{2} |-\vec{b} - \vec{c} + \vec{d}| \\
&= \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + |\vec{d}|^2 + 2\vec{b} \cdot \vec{c} - 2\vec{b} \cdot \vec{d} - 2\vec{c} \cdot \vec{d}} \\
&= \frac{1}{2} \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2 + 2 \times \frac{1}{2} - 2 \times \frac{1}{2} - 2 \times \frac{1}{2}} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} \\
|\overrightarrow{PQ}| &= \frac{1}{2} |-\vec{b} + \vec{c} + 2\vec{d}| \\
&= \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + 4|\vec{d}|^2 - 2\vec{b} \cdot \vec{c} - 4\vec{b} \cdot \vec{d} + 4\vec{c} \cdot \vec{d}} \\
&= \frac{1}{2} \sqrt{1^2 + 1^2 + 4 \times 1^2 - 2 \times \frac{1}{2} - 4 \times \frac{1}{2} + 4 \times \frac{1}{2}} \\
&= \frac{\sqrt{5}}{2}
\end{aligned}$$

(2) より $MN \perp PQ$ であるから, 四角形 $PMQN$ の面積 S は

$$S = \frac{1}{2} |\overrightarrow{MN}| |\overrightarrow{PQ}| = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{10}}{8} \quad (\text{答})$$