

## 図チャレ 第 208 回 (2019 年 1 月)

半径 100 の円柱面と半径 99 の円柱面ではさまれた円筒形を，回転軸と垂直な平面  $\alpha$ ，および  $\alpha$  と  $60^\circ$  をなす平面  $\beta$  の 2 平面で切り取られてできる有界図形を  $K$  とする。ただし， $\alpha, \beta$  と回転軸との交点間距離は 400 である。

- (1)  $K$  の体積  $V$  を求めよ。  
 (2)  $K$  の  $\beta$  による切り口の面積  $S$  を求めよ。

### 解答

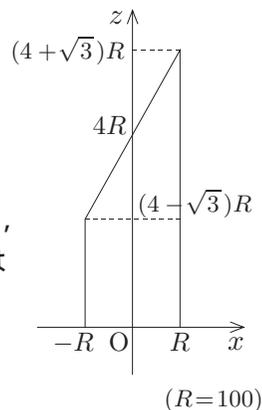
- (1) 説明の都合上，立体  $K$  を  $xyz$  空間において

$$99^2 \leq x^2 + y^2 \leq 100^2, \quad 0 \leq z \leq \sqrt{3}x + 400$$

の位置に置くものとする。

$K$  の  $0 \leq z \leq 100(4 - \sqrt{3})$  の部分は，高さ  $100(4 - \sqrt{3})$  の円筒形であり， $100(4 - \sqrt{3}) \leq z \leq 100(4 + \sqrt{3})$  の部分は，高さ  $200\sqrt{3}$  の円筒形を半分にしたものであるから，体積  $V$  は

$$\begin{aligned} V &= (100^2\pi - 99^2\pi) \left( 400 - 100\sqrt{3} + 200\sqrt{3} \times \frac{1}{2} \right) \\ &= (100 - 99) \times (100 + 99)\pi \times 400 \\ &= 79600\pi \quad (\text{答}) \end{aligned}$$



- (2)  $K$  の  $\beta$  による切り口を  $\alpha$  に正射影したものの面積は， $K$  の  $\alpha$  による断面積

$$100^2\pi - 99^2\pi = (100 - 99)(100 + 99)\pi = 199\pi$$

であるから， $K$  の  $\beta$  による断面積  $S$  は

$$\begin{aligned} S &= 199\pi \times \frac{1}{\cos 60^\circ} \\ &= 199\pi \times 2 \\ &= 398\pi \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

- (注) 一見，積分法の問題のように思われるが，実質的には中学数学の範囲で解ける。空間座標や正射影， $\cos 60^\circ$  は表現上用いているだけにすぎないが，中学より高校（さらには大学）で学んだ数学の方が，より理解を助けるのは確かである。