

図チャレ 第 209 回 (2019 年 2 月)

座標空間の 5 点 $A(1, 1, 2)$, $B(2, 1, 4)$, $C(3, 2, 2)$, $D(2, 7, 1)$, $E(3, 4, 3)$ を考える。以下の問に答えよ。

- (1) 線分 AB と線分 AC のなす角を θ とするとき, $\sin \theta$ の値を求めよ。
ただし, $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ とする。
- (2) 点 D から三角形 ABC を含む平面へ下ろした垂線の足を H とする。 H の座標を求めよ。
- (3) 点 E を通り, 三角形 ABC を含む平面に平行な平面を α とする。四面体 $ABCD$ を平面 α で切ったときの切り口の面積を求めよ。

出典 : 2009 年 岐阜大学 工学部・医学部

解答

$$\begin{aligned} (1) \quad \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (2, 1, 4) - (1, 1, 2) = (1, 0, 2) \\ \overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = (3, 2, 2) - (1, 1, 2) = (2, 1, 0) \\ \cos \theta &= \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}|} = \frac{1 \times 2 + 0 \times 1 + 2 \times 0}{\sqrt{1^2 + 0^2 + 2^2} \sqrt{2^2 + 1^2 + 0^2}} = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ であることも考え,

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \frac{4}{25}} = \frac{\sqrt{21}}{5} \quad (\text{答})$$

- (2) 平面 ABC の法線ベクトルを

$$\vec{v} = (a, b, c)$$

とおくと,

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \vec{v} = a + 2c = 0 \\ \overrightarrow{AC} \cdot \vec{v} = 2a + b = 0 \end{cases}$$

$$a = \frac{b}{-2} = -2c \quad \therefore \frac{a}{2} = \frac{b}{-4} = \frac{c}{-1}$$

\overrightarrow{DH} は

$$\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OD} = (1, 1, 2) - (2, 7, 1) = (-1, -6, 1)$$

の \vec{v} に平行な直線への正射影であるから, $\vec{v} = (2, -4, 1)$ として

$$\begin{aligned} \overrightarrow{DH} &= \frac{\overrightarrow{DA} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2} \vec{v} \\ &= \frac{-1 \times 2 - 6 \times (-4) + 1 \times (-1)}{2^2 + (-4)^2 + (-1)^2} \vec{v} \end{aligned}$$

$$= \vec{v} = (2, -4, 1)$$

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DH} \text{ より}$$

$$H(4, 3, 0) \quad (\text{答})$$

(3) 点 E から平面 ABC へ下ろした垂線の足を K とすると, \overrightarrow{EK} は

$$\overrightarrow{EK} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OE} = (1, 1, 2) - (3, 4, 3) = (-2, -3, -1)$$

の \vec{v} に平行な直線への正射影であるから,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{EK} &= \frac{\overrightarrow{EA} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2} \vec{v} \\ &= \frac{-2 \times 2 - 3 \times (-4) - 1 \times (-1)}{2^2 + (-4)^2 + (-1)^2} \vec{v} \\ &= \frac{3}{7} \vec{v} \end{aligned}$$

辺 DA, DB, DC と平面 α との交点をそれぞれ A' , B' , C' とすると

$$DA' : A'A = DB' : B'B = DC' : C'C = \left(1 - \frac{3}{7}\right) : \frac{3}{7} = 4 : 3$$

四面体 ABCD の平面 α による切り口の面積は

$$\begin{aligned} \triangle A'B'C' &= \left(\frac{4}{7}\right)^2 \triangle ABC \\ &= \left(\frac{4}{7}\right)^2 \times \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin \theta \\ &= \frac{16}{49} \times \frac{1}{2} \times \sqrt{5} \times \sqrt{5} \times \frac{\sqrt{21}}{5} \\ &= \frac{8\sqrt{21}}{49} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$