

## 図チャレ 第 210 回 (2019 年 3 月)

次の 3 つの等式

$$\begin{aligned} z\bar{w} &= \bar{z}w, \\ |z-1| &= 1, \\ |z-w| &= 2 \end{aligned}$$

を満たす複素数  $z, w$  について, 以下の問いに答えよ。ただし  $z \neq 0$  とし,  $z$  の偏角を  $\theta$  と表す。

- (1) 複素数平面において 3 点  $0, z, w$  は一直線上にあることを示せ。
- (2)  $z$  と  $w$  を  $\theta$  を用いて表せ。
- (3)  $\theta$  は  $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$  の範囲を動くとする。このとき  $w$  のとりうる値について, その虚部の最大の値を求めよ。

出典 : 2019 年 岡山大学

解答

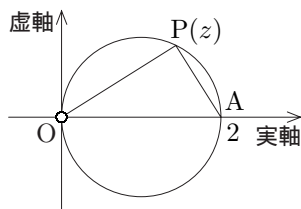
(1)  $z \neq 0$  であるから,  $z\bar{w} = \bar{z}w$  の両辺を  $z\bar{z}$  で割ることができて,

$$\overline{\left(\frac{w}{z}\right)} = \frac{w}{z}$$

$\frac{w}{z}$  は実数であるから, 3 点  $0, z, w$  は一直線上にある。

(証明おわり)

(2)  $|z-1|=1$  ( $z \neq 0$ ) を図示すると



$O(0), P(z), A(2)$  とすると

$$\angle OPA = \frac{\pi}{2}, \quad \angle POA = \pm\theta \quad (-\pi < \theta = \arg z < \pi)$$

であるから,

$$\overline{OP} = \overline{OA} \cos \theta = 2 \cos \theta$$

$z$  を極形式で表すと

$$z = 2 \cos \theta (\cos \theta + i \sin \theta) \quad (\text{答})$$

(1) より

$$\arg w = \theta \text{ または } \theta + \pi$$

$|z - w| = 2$  より

$$w = 2(1 + \cos \theta)(\cos \theta + i \sin \theta)$$

または (答)

$$w = 2(1 - \cos \theta)(-\cos \theta - i \sin \theta)$$

(注) 極形式で表す問題ならば, 後者は

$$w = 2(1 - \cos \theta) \{ \cos(\theta + \pi) + i \sin(\theta + \pi) \}$$

などと表示しなければならない。

(3)  $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$  の範囲で  $w$  の虚部の最大値を求めるだけなら, 虚部が大きい方である

$$w = 2(1 + \cos \theta)(\cos \theta + i \sin \theta)$$

の場合だけ考えればよい。 $w$  の虚部  $y$  は  $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$  で

$$y = 2 \sin \theta (1 + \cos \theta) \geq 0$$

であるから,

$$\begin{aligned} y^2 &= 4 \sin^2 \theta (1 + \cos \theta)^2 \\ &= 4(1 - \cos^2 \theta)(1 + \cos \theta)^2 \\ &= 4(1 - \cos \theta)(1 + \cos \theta)^3 \end{aligned}$$

の増減を調べればよい。

$$f(x) = 4(1 - x)(1 + x)^3 \quad (0 < x \leq 1)$$

とおくと,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4 \{ -1 \cdot (1 + x)^3 + (1 - x) \cdot 3(1 + x)^2 \} \\ &= 4(1 + x)^2 \{ -(1 + x) + 3(1 - x) \} \\ &= 16(1 + x)^2 \left( \frac{1}{2} - x \right) \end{aligned}$$

$x$	(0)	$\frac{1}{2}$	1
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$		↗ 極大 ↘	

$w$  の虚部  $y = \sqrt{f(x)}$  は  $x = \frac{1}{2}$  で

$$\text{最大値 } 2\sqrt{\frac{1}{2} \left( \frac{3}{2} \right)^3} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad (\text{答})$$

をとる。