

図チャレ 第 211 回 (2019 年 4 月)

三角形 ABC は $AB + AC = 2BC$ を満たしている。また、角 A の二等分線と辺 BC の交点を D とするとき、 $AD = 15$ である。さらに、三角形 ABC の内接円の半径は 4 である。このとき以下の問いに答えよ。

- (1) $\theta = \angle BAD$ とするとき $\sin \theta$ の値を求めよ。また、 $A = \angle BAC$ とするとき、 $\sin A$ と $\cos A$ の値を求めよ。
- (2) 辺 BC の長さを求めよ。

出典：2019 年 千葉大学

解答

(1) AD は $\angle BAC$ の二等分線であるから

$$BD : DC = AB : AC$$

$AB + AC = 2BC$ より

$$BD = \frac{1}{2}AB, \quad CD = \frac{1}{2}AC$$

$\triangle ABC$ の内心を I とすると、BI は $\angle ABD$ の二等分線であるから、

$$AI : ID = AB : BD = 2 : 1$$

$AD = 15$ より

$$AI = 10, \quad ID = 5$$

内心 I から辺 AB におろした垂線の足を H とすると、H は $\triangle ABC$ の内接円と辺 AB との接点であるから、

$$HI = (\text{内接円の半径}) = 4$$

直角三角形 AHI において

$$\sin \theta = \frac{HI}{AI} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} \quad (\text{答})$$

$0^\circ < 2\theta < 180^\circ$ より $0^\circ < \theta < 90^\circ$ であるから、

$$\cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^2} = \frac{\sqrt{21}}{5}$$

2 倍角の公式より

$$\sin A = \sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{4\sqrt{21}}{25} \quad (\text{答})$$

$$\cos A = \cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1 = 2 \cdot \frac{21}{25} - 1 = \frac{17}{25} \quad (\text{答})$$

(2) I から辺 BC, CA におろした垂線の足をそれぞれ J, K とすると

$$BH = BJ, \quad CJ = CK$$

AH = AK = AI cos θ = $2\sqrt{21}$ であるから

$$\begin{aligned} BC &= \frac{1}{2}(AB + AC) \\ &= \frac{1}{2}(BH + 2\sqrt{21}) + \frac{1}{2}(CK + 2\sqrt{21}) \\ &= \frac{1}{2}(BH + CK) + 2\sqrt{21} \\ &= \frac{1}{2}(BJ + CJ) + 2\sqrt{21} \\ &= \frac{1}{2}BC + 2\sqrt{21} \end{aligned}$$

$$\therefore BC = 4\sqrt{21} \quad (\text{答})$$