

## 図チャレ 第 212 回 (2019 年 5 月)

四面体 OABC において、辺 AB を 1 : 2 に内分する点を P、辺 BC を 2 : 3 に内分する点を Q、辺 CO を 3 : 4 に内分する点を R とする。辺 OA 上に点 S を、4 点 P、Q、R、S が同一平面上にあるようにとる。次の問いに答えなさい。

- (1) 比 OS : SA を求めなさい。
- (2) 四面体 OABC が正四面体のとき、頂点 O から線分 QS に下ろした垂線の足を H とする。△OSH と △OHQ の面積比を求めなさい。

出典：2019 年 信州大学 教育学部

### 解答

(1) P、Q、R についての仮定より

$$\overrightarrow{OP} = \frac{2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{1+2} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$$

$$\overrightarrow{OQ} = \frac{3\overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC}}{2+3} = \frac{3}{5}\overrightarrow{OB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{OC}$$

$$\overrightarrow{OR} = \frac{4}{7}\overrightarrow{OC}$$

点 S は平面 PQR 上にあるから

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OS} &= \overrightarrow{OR} + s\overrightarrow{RP} + t\overrightarrow{RQ} \quad (s, t \text{ は実数}) \\ &= \overrightarrow{OR} + s(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OR}) + t(\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OR}) \\ &= \frac{4}{7}\overrightarrow{OC} + s\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} - \frac{4}{7}\overrightarrow{OC}\right) + t\left(\frac{3}{5}\overrightarrow{OB} - \frac{6}{35}\overrightarrow{OC}\right) \\ &= \frac{2}{3}s\overrightarrow{OA} + \left(\frac{1}{3}s + \frac{3}{5}t\right)\overrightarrow{OB} + \frac{4}{7}\left(1 - s - \frac{3}{10}t\right)\overrightarrow{OC} \end{aligned}$$

と表される。

$\overrightarrow{OA}$ ,  $\overrightarrow{OB}$ ,  $\overrightarrow{OC}$  は 1 次独立であることに注意して、点 S が辺 OA 上にあることより

$$0 \leq \frac{2}{3}s \leq 1 \quad \text{かつ} \quad \frac{1}{3}s + \frac{3}{5}t = 0 \quad \text{かつ} \quad 1 - s - \frac{3}{10}t = 0$$

$0 \leq s \leq \frac{3}{2}$  のもとで、 $s$  を消去すると

$$\frac{1}{3}\left(1 - \frac{3}{10}t\right) + \frac{3}{5}t = \frac{1}{2}t + \frac{1}{3} = 0 \quad \therefore t = -\frac{2}{3}, s = \frac{6}{5}$$

$$\therefore \overrightarrow{OS} = \frac{2}{3}s\overrightarrow{OA} = \frac{4}{5}\overrightarrow{OA}$$

よって、求める比は

$$OS : SA = 4 : 1 \quad (\text{答})$$

(2) 比を求めるだけであれば，正四面体 OABC の一辺の長さを 1 としてよい。  
このとき，

$$|\vec{OA}| = |\vec{OB}| = |\vec{OC}| = 1,$$

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = \vec{OB} \cdot \vec{OC} = \vec{OC} \cdot \vec{OA} = 1 \times 1 \times \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} |\vec{OQ}|^2 &= \left(\frac{3}{5}\right)^2 |\vec{OB}|^2 + 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} \vec{OB} \cdot \vec{OC} + \left(\frac{2}{5}\right)^2 |\vec{OC}|^2 \\ &= \frac{9}{25} \times 1^2 + \frac{12}{25} \times \frac{1}{2} + \frac{4}{25} \times 1^2 \\ &= \frac{19}{25} \end{aligned}$$

$$\vec{SQ} = \vec{OQ} - \vec{OS} = \frac{1}{5}(-4\vec{OA} + 3\vec{OB} + 2\vec{OC})$$

$$\begin{aligned} |\vec{SQ}|^2 &= \frac{1}{5^2} (16|\vec{OA}|^2 + 9|\vec{OB}|^2 + 4|\vec{OC}|^2 \\ &\quad - 24\vec{OA} \cdot \vec{OB} + 12\vec{OB} \cdot \vec{OC} - 16\vec{OC} \cdot \vec{OA}) \\ &= \frac{1}{5^2} \left( 16 \times 1^2 + 9 \times 1^2 + 4 \times 1^2 - 24 \times \frac{1}{2} + 12 \times \frac{1}{2} - 16 \times \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{15}{5^2} \end{aligned}$$

SH = x とおき， $\triangle OSH$  と  $\triangle OHQ$  にピタゴラスの定理を適用すると

$$OH^2 = OS^2 - SH^2 = OQ^2 - HQ^2$$

$$\left(\frac{4}{5}\right)^2 - x^2 = \frac{19}{25} - \left(\frac{\sqrt{15}}{5} - x\right)^2$$

$$\frac{16}{25} = \frac{19}{25} - \frac{15}{25} + \frac{2\sqrt{15}}{5}x$$

$$\therefore x = SH = \frac{5}{2\sqrt{15}} \times \frac{12}{25} = \frac{2\sqrt{15}}{25}, \quad HQ = SQ - SH = \frac{3\sqrt{15}}{25}$$

$\triangle OSH$  と  $\triangle OHQ$  の面積比は

$$\begin{aligned} \triangle OSH : \triangle OHQ &= \frac{1}{2} \cdot SH \cdot OH : \frac{1}{2} \cdot HQ \cdot OH \\ &= SH : HQ \\ &= 2 : 3 \quad (\text{答}) \end{aligned}$$