

図チャレ 第 213 回 (2019 年 6 月)

四面体 ABCD の辺 AB, AC, BD, CD 上にそれぞれ点 P, Q, R, S をとる。ただし P, Q, R, S のどの点も四面体 ABCD の頂点とは異なるものとする。4 点 P, Q, R, S が同一平面上にあるとき,

$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BR}{RD} = \frac{AQ}{QC} \cdot \frac{CS}{SD}$$

が成り立つことを示せ。

出典：2019 年 香川大学 医学部

解答

4 点 P, Q, R, S を含む平面を α とする。

(i) 平面 α が直線 AD と平行であるとき

$$PR \parallel AD \parallel QS$$

であるから,

$$BP : PA = BR : RD = s : 1 - s \quad (0 < s < 1)$$

$$CQ : QA = CS : SD = t : 1 - t \quad (0 < t < 1)$$

とおくことができ、

$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BR}{RD} = \frac{1-s}{s} \cdot \frac{s}{1-s} = 1$$

$$\frac{AQ}{QC} \cdot \frac{CS}{SD} = \frac{1-t}{t} \cdot \frac{t}{1-t} = 1$$

$$\therefore \frac{AP}{PB} \cdot \frac{BR}{RD} = \frac{AQ}{QC} \cdot \frac{CS}{SD}$$

(ii) 平面 α と直線 AD が平行でないとき、ある点 T で交わる。

P, R, T は同一直線上にあるから、メネラウスの定理より

$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BR}{RD} \cdot \frac{DT}{TA} = 1 \quad \dots\dots ①$$

Q, S, T は同一直線上にあるから、メネラウスの定理より

$$\frac{AQ}{QC} \cdot \frac{CS}{SD} \cdot \frac{DT}{TA} = 1 \quad \dots\dots ②$$

①かつ②より

$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BR}{RD} = \frac{AT}{TD} = \frac{AQ}{QC} \cdot \frac{CS}{SD}$$

(証明おわり)

(注) ベクトルを用いて示してもよい。