

図チャレ 第 214 回 (2019 年 7 月)

純虚数 w に対して, 複素数 z を $w = \frac{z}{z-2}$ により定める.

- (1) 点 z が描く図形を複素数平面上に図示せよ.
- (2) z の偏角を θ ($-\pi < \theta < \pi$) とするとき, z^2 を θ を用いて表せ.
- (3) 複素数平面上で 3 点 $O(0)$, $P(z)$, $Q(z^2)$ を頂点とする三角形の面積 S の最大値を求めよ. また, S が最大となるときの z の値を求めよ.

解答

- (1) w は純虚数であるから

$$\bar{w} = -w \quad \text{かつ} \quad w \neq 0$$

$$\frac{\bar{z}}{\bar{z}-2} = -\frac{z}{z-2}$$

$z \neq 0, 2$ のもとで

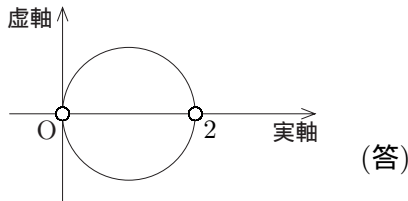
$$\bar{z}(z-2) + z(\bar{z}-2) = 0$$

$$z\bar{z} - \bar{z} - z = 0$$

$$(z-1)(\bar{z}-1) = 1$$

$$|z-1|^2 = 1 \quad \therefore |z-1| = 1 \quad (z \neq 0, 2)$$

点 z が描く図形は



(別解) $z = x + yi$, $w = ti$ (x, y, t は実数, $t \neq 0$) とおくと, $w = \frac{z}{z-2}$ より

$$ti(x + yi - 2) = x + yi \quad \text{かつ} \quad x + yi \neq 2$$

$$-ty + t(x-2)i = x + yi$$

実部, 虚部をそれぞれ比べると

$$\begin{cases} -ty = x & \dots\dots \textcircled{1} \\ t(x-2) = y & \dots\dots \textcircled{2} \end{cases}$$

ここで, $y = 0$ とすると, ②より $t = 0$ または $x = 2$ となって, w が純虚数であることと $z \neq 0$ に反するから

$$y \neq 0$$

①より $t = -\frac{x}{y}$ であるから, ②に代入して t を消去すると

$$x(x-2) + y^2 = 0 \quad \text{かつ} \quad y \neq 0 \quad (\text{図は解答と同じ})$$

$$(2) \quad \theta = \arg z \quad \left(0 < |z| < \frac{\pi}{2}\right)$$

点 A(1) から弦 OP におろした垂線の足を H とすると, OA = AP より

$$OH = HP, \quad \angle APH = \angle AOH = |\theta|$$

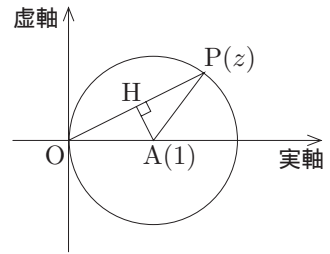
直角三角形 OAH, PAH に注目すると

$$OH = HP = \cos \theta$$

であるから,

$$z = 2 \cos \theta (\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$\therefore z^2 = 4 \cos^2 \theta (\cos 2\theta + i \sin 2\theta) \quad (\text{答})$$



(3) 面積 S の最大値を求めるだけであれば,

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

の範囲で考えればよい。このとき

$$S = \frac{1}{2} \cdot 2 \cos \theta \cdot 4 \cos^2 \theta \cdot \sin(2\theta - \theta) = (1 + \cos 2\theta) \sin 2\theta$$

$$\begin{aligned} \frac{dS}{d\theta} &= -2 \sin 2\theta \cdot \sin 2\theta + (1 + \cos 2\theta) \cdot 2 \cos 2\theta \\ &= -2(1 - \cos^2 2\theta) + (1 + \cos 2\theta) \cdot 2 \cos 2\theta \\ &= 2(\cos 2\theta + 1)(2 \cos 2\theta - 1) \end{aligned}$$

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ において

$$\frac{dS}{d\theta} > 0 \iff 2 \cos 2\theta - 1 > 0$$

$$\iff \cos 2\theta > \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3} \iff 2\theta < \frac{\pi}{3} \iff \theta < \frac{\pi}{6}$$

であるから, S の増減は

θ	(0)	$\frac{\pi}{6}$	$\left(\frac{\pi}{2}\right)$
$\frac{dS}{d\theta}$	+	0	-
S	\nearrow	極大	\searrow

S は $\theta = \frac{\pi}{6}$ のとき極大かつ最大であり, 最大値は

$$\left(1 + \cos \frac{\pi}{3}\right) \sin \frac{\pi}{3} = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4} \quad (\text{答})$$

$-\frac{\pi}{2} < \theta < 0$ のときとあわせて, S が最大となるときの z は

$$z = 2 \cos \frac{\pi}{6} \left(\cos \frac{\pi}{6} \pm i \sin \frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i \quad (\text{答})$$