

.. 図チャレ 第 215 回 (2019 年 8 月)

座標平面上で曲線  $C: y^2 = \frac{1}{(x+1)^3(1-x)}$  と  $y$  軸および直線  $x = \frac{3}{5}$  で囲まれる領域の面積  $S$  を求めよ。

解答

$y^2 = \frac{1}{(x+1)^3(1-x)} > 0$  より, 曲線  $C$  は  $-1 < x < 1$  の範囲に存在し, 題意の図形は

$$0 \leq x \leq \frac{3}{5}, \quad -\frac{1}{(1+x)\sqrt{1-x^2}} \leq y \leq \frac{1}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}$$

で表される領域であるから, 面積  $S$  は

$$S = 2 \int_0^{\frac{3}{5}} \frac{1}{(1+x)\sqrt{1-x^2}} dx$$

$\sin \alpha = \frac{3}{5}$  ( $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ) とおくと  $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ ,  $\tan \alpha = \frac{3}{4}$  であり,  $x = \sin \theta$  により置換積分すると

$$\begin{aligned} S &= 2 \int_0^{\alpha} \frac{1}{(1+\sin \theta)\sqrt{1-\sin^2 \theta}} (\sin \theta)' d\theta \\ &= 2 \int_0^{\alpha} \frac{1}{(1+\sin \theta)|\cos \theta|} \cdot \cos \theta d\theta \\ &= 2 \int_0^{\alpha} \frac{1}{1+\sin \theta} d\theta \\ &= 2 \int_0^{\alpha} \frac{1-\sin \theta}{1-\sin^2 \theta} d\theta \\ &= 2 \int_0^{\alpha} \left\{ \frac{1}{\cos^2 \theta} + \frac{(\cos \theta)'}{\cos^2 \theta} \right\} d\theta \\ &= 2 \left[ \tan \theta - \frac{1}{\cos \theta} \right]_0^{\alpha} \\ &= 2 \left\{ \frac{3}{4} - \left( \frac{5}{4} - 1 \right) \right\} \\ &= 1 \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(積分計算の別法)

$$f(t) = \frac{2t}{1+t^2} \quad (t \geq 0)$$

とおくと,  $t > 0$  において

$$f'(t) = 2 \cdot \frac{1 \cdot (1+t^2) - t \cdot 2t}{(1+t^2)^2} = \frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2}$$

$$f'(t) > 0 \iff 1-t^2 > 0 \iff (t+1)(t-1) < 0 \iff 0 < t < 1$$

であるから,  $t \geq 0$  における  $f(t)$  の増減は

$t$	0	1	$(\infty)$
$f'(t)$	+	0	-
$f(t)$	0	↗ 極大 1	↘

$t \geq 0$  のもとで

$$0 \leq \frac{2t}{1+t^2} \leq \frac{3}{5}$$

を満たす  $t$  を求めると

$$t \geq 0 \text{ かつ } 10t \leq 3(1+t^2)$$

$$t \geq 0 \text{ かつ } 3t^2 - 10t + 3 = (3t-1)(t-3) \geq 0$$

$$\therefore 0 \leq t \leq \frac{1}{3} \text{ または } t \geq 3$$

積分区間  $0 \leq t \leq \frac{1}{3}$  を選んで,  $x = f(t)$  により置換積分すると

$$\begin{aligned} S &= 2 \int_0^{\frac{3}{5}} \frac{1}{(1+x)\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= 2 \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{1}{\left(1 + \frac{2t}{1+t^2}\right) \sqrt{1 - \left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2}} \left(\frac{2t}{1+t^2}\right)' dt \\ &= 2 \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{1}{\frac{1+2t+t^2}{1+t^2} \cdot \frac{\sqrt{(1+t^2)^2 - 4t^2}}{1+t^2}} \cdot \frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2} dt \\ &= 2 \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{1}{(1+t)^2 |1-t^2|} \cdot 2(1-t^2) dt \\ &= 4 \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{1}{(1+t)^2} dt \quad \left(0 \leq t \leq \frac{1}{3} \text{ では } 1-t^2 > 0\right) \\ &= 4 \left[ -\frac{1}{1+t} \right]_0^{\frac{1}{3}} \\ &= 4 \left( -\frac{1}{\frac{1}{3}+1} + 1 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 4\left(-\frac{3}{4} + 1\right) \\
&= 1 \quad (\text{答})
\end{aligned}$$

(注) 「図形問題にチャレンジ」では、高校数学の範囲での解答を原則としているため、広義積分を避けたが、 $t \geq 3$  で積分してもよい。置換積分の積分区間は 1 対 1 でありさえすればどの区間を選んでよいので、同じ結果が得られることになる。

$$\begin{aligned}
S &= 2 \int_0^{\frac{3}{5}} \frac{1}{(1+x)\sqrt{1-x^2}} dx \\
&= 2 \int_{\infty}^3 \frac{1}{\left(1 + \frac{2t}{1+t^2}\right) \sqrt{1 - \left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2}} \left(\frac{2t}{1+t^2}\right)' dt \\
&= 2 \int_{\infty}^3 \frac{1}{(1+t)^2 |1-t^2|} \cdot 2(1-t^2) dt \\
&= 4 \int_3^{\infty} \frac{1}{(1+t)^2} dt \quad (t \geq 3 \text{ では } 1-t^2 < 0) \\
&= 4 \left[ -\frac{1}{1+t} \right]_3^{\infty} \\
&= 4 \left( 0 + \frac{1}{1+3} \right) \\
&= 1 \quad (\text{答})
\end{aligned}$$