

## 図チャレ 第 216 回 (2019 年 9 月)

三角形 ABC の垂心を H とする。

- (1) 三角形 HAB の外接円上に点 D を HD が直径となるようにとるとき，四角形 ACBD は平行四辺形であることを証明せよ。
- (2) 三角形 HAB, 三角形 HBC, 三角形 HCA は外接円の半径がすべて等しいことを証明せよ。

### 解答

- (1) HD は  $\triangle HAB$  の外接円の直径であるから

$$\angle HAD = \angle HBD = 90^\circ$$

AC  $\perp$  BH  $\perp$  DB より

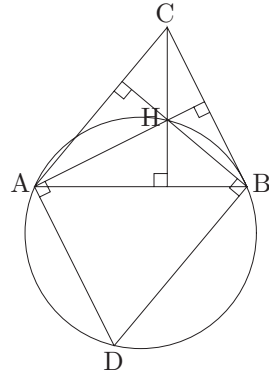
$$AC \parallel DB$$

AD  $\perp$  AH  $\perp$  CB より

$$AD \parallel CB$$

よって，四角形 ACBD は平行四辺形である。

(証明おわり)



- (2) (1)と同様にして， $\triangle HBC$  の外接円上に HE が直径となるような点 E をとると

ABEC は平行四辺形

となり， $\triangle HCA$  の外接円上に HF が直径となるような点 F をとると

ABCF は平行四辺形

となる。平行四辺形の対辺の長さは等しいから

$$\triangle ABC \cong \triangle BAD \cong \triangle ECB \cong \triangle CFA$$

であり，特に

$$BD = BE, \quad BH \perp DE$$

$$CE = CF, \quad CH \perp EF$$

$$AF = AD, \quad AH \perp FD$$

が成り立つ。

よって，点 H は  $\triangle DEF$  の各辺の垂直二等分線の交点(外心)であるから

$$DH = EH = FH$$

であり，3つの外接円の直径は等しいから，半径も等しい。

(証明おわり)

