

図チャレ 第 217 回 (2019 年 10 月)

a を 1 より大きい定数とする。座標平面上において、点 P が x 軸上の $x > 1$ の部分を、点 Q が y 軸上の $y > 0$ の部分を、

$$OP + OQ = a$$

を満たしながら動く。線分 PQ と直線 $x = 1$ の交点を $R(1, r)$ とするとき、 \sqrt{r} の最大値を求めよ。

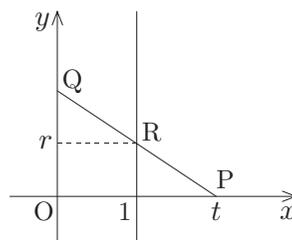
解答

$P(t, 0)$ ($t > 1$) とおくと、 $OP + OQ = a$ より

$$Q(0, a - t)$$

であり、 $PR : RQ = (t - 1) : 1$ より

$$\begin{aligned} r &= \frac{PR}{PQ} y_Q = \frac{t-1}{t} (a-t) \\ &= \frac{-t^2 + (a+1)t - a}{t} \\ &= a + 1 - \left(t + \frac{a}{t}\right) \end{aligned}$$



$t > 0$, $\frac{a}{t} > 0$ を考え、相加平均と相乗平均の関係より

$$r \leq a + 1 - 2\sqrt{t \cdot \frac{a}{t}} = a + 1 - 2\sqrt{a} = (\sqrt{a} - 1)^2$$

$a > 1$ も考えて

$$\sqrt{r} \leq \sqrt{a} - 1$$

ここで、不等式の等号は

$$t = \frac{a}{t} > 1 \text{ すなわち } t = \sqrt{a}$$

のとき成り立つ(実際に最大値をとる t の値が存在する)から

$$\sqrt{r} \text{ の最大値は } \sqrt{a} - 1 \quad (\text{答})$$