

図チャレ 第 218 回 (2019 年 11 月)

一辺の長さ 1 の正四面体 ABCD がある。

- (1) 面 ABC と面 ABD のなす角を α とするとき, $\cos \alpha$, $\sin \alpha$ の値を求めよ。
 (2) 正四面体 ABCD を辺 AB に平行な平面 H へ正射影させて得られる図形の面積 S の最大値, 最小値を求めよ。

解答

- (1) AB の中点を M とすると, $AB \perp CM$, $AB \perp DM$ より

$$\alpha = \angle CMD$$

$$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AD}| = 1, \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = 1^2 \times \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \text{ より}$$

$$|\overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{MD}| = \frac{\sqrt{3}}{2} |\overrightarrow{AB}| = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD} &= \left(\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} \right) \cdot \left(\overrightarrow{AD} - \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} \right) \\ &= \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} - \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \frac{1}{4} |\overrightarrow{AB}|^2 \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times 1^2 = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

であるから

$$\cos \alpha = \frac{\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD}}{|\overrightarrow{MC}| |\overrightarrow{MD}|} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{3} \quad (\text{答})$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3} \right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \quad (\text{答})$$

- (2) 正四面体 ABCD を平行移動して辺 AB が平面 H にあるとしてよい。

平面 H と面 ABC のなす角を θ ($0 \leq \theta \leq \pi - \alpha$) とすると, 平面 H と面 ABD のなす角は $\pi - \theta - \alpha$ である。

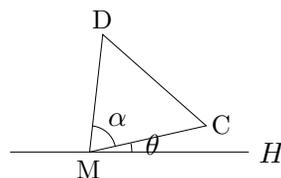
- (i) $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} - \alpha$ のとき

$$S = \frac{1}{2} \times 1^2 \times \sin 60^\circ \times \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{4} \cos \theta$$

であるから

$$\theta = 0 \text{ で最大値 } \frac{\sqrt{3}}{4}, \quad \theta = \frac{\pi}{2} - \alpha \text{ で最小値}$$

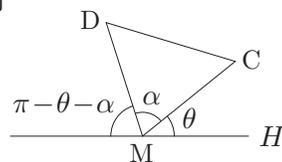
$$\frac{\sqrt{3}}{4} \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \frac{\sqrt{3}}{4} \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$



をとる。

(ii) $\frac{\pi}{2} - \alpha \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ のとき

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{1}{2} \times 1^2 \times \sin 60^\circ \times \{\cos \theta + \cos(\pi - \theta - \alpha)\} \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{4} \{\cos \theta - \cos(\theta + \alpha)\} \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{4} \{\cos \theta - (\cos \theta \cos \alpha - \sin \theta \sin \alpha)\} \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{4} \left\{ \cos \theta - \left(\frac{1}{3} \cos \theta - \frac{2\sqrt{2}}{3} \sin \theta \right) \right\} \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{2\sqrt{2}}{3} \sin \theta + \frac{2}{3} \cos \theta \right) \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \sin \theta + \frac{1}{\sqrt{3}} \cos \theta \right) \\
 &= \frac{1}{2} (\sin \theta \cos \beta + \cos \theta \sin \beta) \\
 &= \frac{1}{2} \sin(\theta + \beta)
 \end{aligned}$$



ただし, β は

$$\cos \beta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \quad \sin \beta = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \left(0 < \beta < \frac{\pi}{2} \right)$$

を満たす定数である。

$$\frac{\pi}{2} - \alpha + \beta \leq \theta + \beta \leq \frac{\pi}{2} + \beta$$

であり,

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha + \beta\right) &= \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta) \\
 &= \frac{1}{2} (\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + \frac{2\sqrt{2}}{3} \times \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{6}}
 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right) = \frac{1}{2} \cos \beta = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

であるから, S は

$$\theta + \beta = \frac{\pi}{2} \text{ で最大値 } \frac{1}{2} \left(\geq \frac{\sqrt{3}}{4} \right),$$

$$\theta + \beta = \frac{\pi}{2} - \alpha + \beta, \frac{\pi}{2} + \beta \text{ で最小値 } \frac{1}{\sqrt{6}}$$

をとる。

(iii) $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi - \alpha$ のとき

$$0 \leq \pi - \alpha - \theta \leq \frac{\pi}{2} - \alpha$$

であるから, (i)より

$$S \text{ の最大値は } \frac{\sqrt{3}}{4}, \text{ 最小値は } \frac{1}{\sqrt{6}}$$

をとる。

以上より, S は

$$\begin{cases} \theta = \frac{\pi}{2} - \beta \text{ のとき最大値 } \frac{1}{2} \\ \theta = \frac{\pi}{2} - \alpha, \frac{\pi}{2} \text{ のとき最小値 } \frac{1}{\sqrt{6}} \end{cases} \quad (\text{答})$$

をとる。