

## 図チャレ 第 219 回 (2019 年 12 月)

- (1)  $xy$  平面上で点  $P(a, b)$  を原点のまわりに  $\theta$  だけ回転させて得られる点  $Q$  の座標を  $a, b, \theta$  を用いて表せ。
- (2)  $xy$  平面上の直線  $tx + (1-t)y - t(1-t) = 0$  を原点のまわりに  $\frac{\pi}{4}$  だけ回転させて得られる直線の方程式を求めよ。
- (3)  $xy$  平面上の直線  $tx + (1-t)y - t(1-t) = 0$  が  $0 \leq t \leq 1$  の範囲で通過してできる領域を図示せよ。

### 解答

- (1)  $a = r \cos \alpha, b = r \sin \alpha$  ( $r \geq 0$ ) とおくと

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OQ} &= r(\cos(\alpha + \theta), \sin(\alpha + \theta)) \\ &= (r \cos \alpha \cos \theta - r \sin \alpha \sin \theta, r \sin \alpha \cos \theta + r \cos \alpha \sin \theta) \\ &= (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta) \quad (\text{答})\end{aligned}$$

- (2) 点  $(x, y)$  を原点のまわりに  $-\frac{\pi}{4}$  回転させると  $\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}, \frac{-x+y}{\sqrt{2}}\right)$  になるから、直線  $tx + (1-t)y - t(1-t) = 0$  を原点のまわりに  $\frac{\pi}{4}$  回転させて得られる直線の方程式は

$$\begin{aligned}t \cdot \frac{x+y}{\sqrt{2}} + (1-t) \frac{-x+y}{\sqrt{2}} - t(1-t) &= 0 \\ \therefore (2t-1)x + y - \sqrt{2}t(1-t) &= 0 \quad (\text{答})\end{aligned}$$

- (3) 直線  $(2t-1)x + y - \sqrt{2}t(1-t) = 0$  が  $0 \leq t \leq 1$  の範囲で通過してできる領域を  $-\frac{\pi}{4}$  回転して得られる図形が求める領域である。

$(2t-1)x + y - \sqrt{2}t(1-t) = 0$  を  $t$  について整理すると

$$t^2 + (\sqrt{2}x - 1)t + \frac{-x+y}{\sqrt{2}} = 0$$

ここで、

$$\begin{aligned}f(x) &= t^2 + (\sqrt{2}x - 1)t + \frac{-x+y}{\sqrt{2}} \\ &= \left(t + \frac{\sqrt{2}x - 1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}y - \frac{1}{4}\end{aligned}$$

とおき、 $0 \leq t \leq 1$  において  $u = f(t)$  のグラフと  $t$  軸 ( $u = 0$ ) が共有点をもつ条件を考える。

- (i)  $f(0)f(1) \leq 0$  のとき

$f(0)f(1) = 0$  ならば、 $u = f(t)$  のグラフは点  $(0, 0)$  または点  $(1, 0)$  を通る。

$f(0)f(1) < 0$  ならば, 点  $(0, f(0))$  と点  $(1, f(1))$  は  $t$  軸に関して反対側にあるから, いずれの場合も条件を満たし,

$$f(0)f(1) = \frac{-x+y}{\sqrt{2}} \cdot \frac{x+y}{\sqrt{2}} \leq 0 \quad \therefore (y-x)(y+x) \leq 0$$

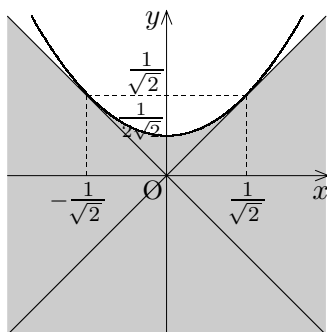
(ii)  $f(0)f(1) > 0$  のとき

$u = f(t)$  のグラフが  $0 < t < 1$  において  $t$  軸と接するか, または 2 点で交わる条件を求めることになり,

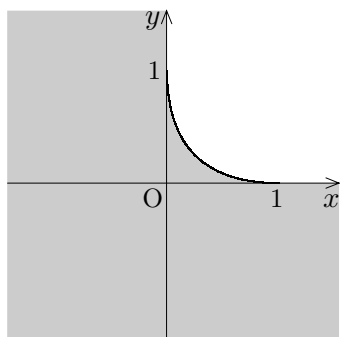
$$\begin{cases} \text{(頂点の } u \text{ 座標)} = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}y - \frac{1}{4} \leq 0 \\ f(0) = \frac{-x+y}{\sqrt{2}} > 0 \\ f(1) = \frac{x+y}{\sqrt{2}} > 0 \\ \text{軸: } 0 < -\frac{\sqrt{2}x-1}{2} < 1 \end{cases}$$

$$\therefore y \leq -\frac{1}{\sqrt{2}}x^2 + \frac{1}{2\sqrt{2}} \text{ かつ } y > x \text{ かつ } y > -x \text{ かつ } -\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

(i) または (ii) より,  $\frac{\pi}{4}$  回転させた領域は



原点のまわりに  $-\frac{\pi}{4}$  回転させることにより, 求める領域は次図の網目部分(境界線上を含む)となる。



(答)