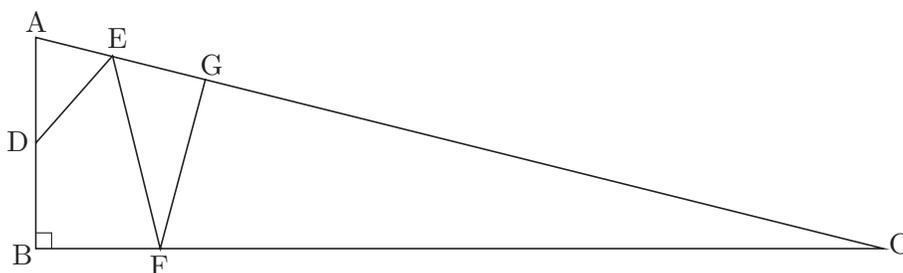


## 図チャレ 第 221 回 (2020 年 2 月)

三角形 ABC は  $\angle A = 75^\circ$ ,  $\angle B = 90^\circ$ ,  $AC = \sqrt{6} + \sqrt{2}$  を満たすとする。  
 点 D を辺 AB の中点とする。点 E を辺 AC 上に,  $\angle AED$  が  $75^\circ$  より小さいある角度になるようにとる。つぎに, 点 F を辺 BC 上に,  $\angle AED = \angle CEF$  を満たすようにとる。さらに, 点 G を辺 AC 上に  $\angle BFE = \angle CFG$  を満たすようにとったところ,  $\angle CGF = 90^\circ$  であった (下図を参照)。このとき, 以下の問いに答えなさい。

- (1) AE の長さを求めなさい。
- (2) CG の長さを求めなさい。



出典：2010 年 日本大学 医学部

### 解答

- (1) まず, 辺 AB の長さを求める。

AB =  $a$  とおき, 辺 BC 上に  $\angle APB = 30^\circ$  となる点 P をとると, 直角三角形 ABP において三平方の定理より

$$AP = 2a, \quad BP = \sqrt{3}a$$

このとき,  $\angle PAC = \angle PCA = 15^\circ$  より  $AP = CP$  となるから,

$$\begin{aligned} AC^2 &= AB^2 + BC^2 \\ &= a^2 + (\sqrt{3} + 2)^2 a^2 = (8 + 2\sqrt{12})a^2 = (\sqrt{6} + \sqrt{2})^2 a^2 \end{aligned}$$

$AC = \sqrt{6} + \sqrt{2}$  であるから

$$a = AB = 1$$

直角三角形 ABC において  $\angle C = 15^\circ$  であるから, 直角三角形 CGF において

$$\angle CFG = 90^\circ - \angle C = 75^\circ$$

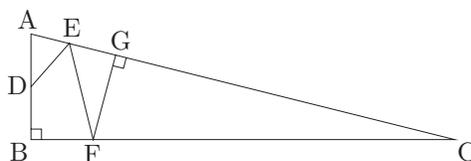
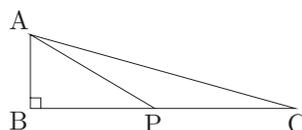
$\angle BFE = \angle CFG$  より

$$\angle EFG = 180^\circ - 75^\circ \times 2 = 30^\circ$$

直角三角形 EFG において

$$\angle FEG = 90^\circ - \angle EFG = 60^\circ$$

$$\therefore \angle AED = \angle CEF = \angle FEG = 60^\circ$$



△ADEにおいて

$$\angle ADE = 180^\circ - (75^\circ + 60^\circ) = 45^\circ$$

であるから，正弦定理より

$$\frac{AE}{\sin 45^\circ} = \frac{AD}{\sin 60^\circ}$$
$$\therefore AE = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} AD = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{6}} \quad (\text{答})$$

(注) 加法定理(数学Ⅱ)を用いることにより， $AB = AC \sin 15^\circ$ を求めてもよい。

(2)  $CG = x$ とおくと，

$$EG = AC - AE - CG = \sqrt{6} + \sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{6}} - x$$

直角三角形 EFG および直角三角形 CFG において

$$GF = \sqrt{3} EG = \frac{1}{2 + \sqrt{3}} CG$$
$$\sqrt{3} \left( \sqrt{6} + \sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{6}} - x \right) = \frac{1}{2 + \sqrt{3}} x$$
$$3\sqrt{2} + \sqrt{6} - \frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{3} x = (2 - \sqrt{3}) x$$
$$\frac{6 + 2\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}} - \sqrt{3} x = 2x - \sqrt{3} x$$
$$\therefore x = CG = \frac{5 + 2\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2} + 2\sqrt{6}}{4} \quad (\text{答})$$