

図チャレ 第 223 回 (2020 年 4 月)

xyz 空間に 4 点 $A(0, 0, 1)$, $B(1, 0, 0)$, $C(0, 2, 0)$, $D(2, 2, 0)$ をとる．また，点 P は線分 BC 上を動き， $BP : PC = t : (1 - t)$ ($0 < t < 1$) とする．このとき，次の問いに答えよ．

- (1) 点 P の座標を t を用いて表せ．
- (2) 点 A から線分 BC に下ろした垂線を AR とする．点 R の座標を求めよ．また，線分 AR の長さを求めよ．
- (3) 点 $E(p, q, 0)$ は xy 平面上にあり， $q < 0$ とする．さらに，直線 ER と直線 BC は垂直に交わり，線分 ER と線分 AR は長さが等しいとする．このとき，点 E の座標を求めよ．
- (4) 線分 AP と線分 PD の長さの和の最小値を求めよ．また，そのときの点 P の座標を求めよ．

出典：2020 年 同志社大学

解答

- (1) P は BC を $t : 1 - t$ に内分するから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= (1 - t)\overrightarrow{OB} + t\overrightarrow{OC} \\ &= (1 - t)(1, 0, 0) + t(0, 2, 0) \\ &= (1 - t, 2t, 0) \\ \therefore P(1 - t, 2t, 0) \quad (\text{答})\end{aligned}$$

- (2) R は直線 BC 上の点であるから，(1) より

$$R(1 - r, 2r, 0) \quad (r \text{ は実数})$$

と表され， $\overrightarrow{AR} = (1 - r, 2r, -1) \perp \overrightarrow{BC}$ より

$$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AR} = -(1 - r) + 2 \cdot 2r + 0 \cdot (-1) = 0$$

$$\therefore r = \frac{1}{5}$$

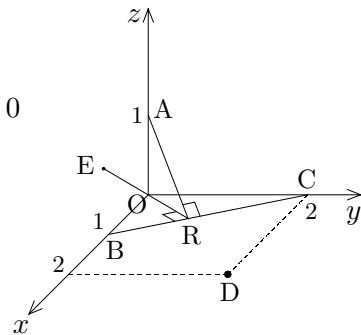
$(1 - r, 2r, 0)$ に代入して，点 R の座標は

$$\left(\frac{4}{5}, \frac{2}{5}, 0\right) \quad (\text{答})$$

このとき

$$\overrightarrow{AR} = \left(\frac{4}{5}, \frac{2}{5}, 0\right) - (0, 0, 1) = \frac{1}{5}(4, 2, -5)$$

$$|\overrightarrow{AR}| = \frac{1}{5}\sqrt{4^2 + 2^2 + (-5)^2} = \frac{3}{\sqrt{5}} \quad (\text{答})$$



(3) $\overrightarrow{ER} \perp \overrightarrow{BC} = (-1, 2, 0)$ より, 点 R を通り \overrightarrow{BC} に垂直な平面と xy 平面との交線

$$y = \frac{1}{2}x, \quad z = 0$$

上に点 E はある。

点 E の y 座標は負であるから, \overrightarrow{RE} と同じ向きの単位ベクトルは

$$\frac{\overrightarrow{RE}}{|\overrightarrow{RE}|} = \frac{1}{\sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + 0^2}}(-2, -1, 0) = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2, -1, 0)$$

$$ER = AR = \frac{3}{\sqrt{5}} \text{ より}$$

$$\overrightarrow{RE} = \frac{AR}{\sqrt{5}}(-2, -1, 0) = \frac{3}{5}(-2, -1, 0) = \left(-\frac{6}{5}, -\frac{3}{5}, 0\right)$$

$$\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OR} + \overrightarrow{RE} \text{ より}$$

$$E\left(-\frac{2}{5}, -\frac{1}{5}, 0\right) \quad (\text{答})$$

(4) $\triangle ABC \equiv \triangle EBC$ より

$$AP = EP$$

であり, E と D は線分 BC に関して反対側にあるから, $AP + PD = EP + PD$ が最小となるのは P が線分 BC と線分 DE の交点のときである。よって, その最小値は

$$DE = \sqrt{\left(2 + \frac{2}{5}\right)^2 + \left(2 + \frac{1}{5}\right)^2 + 0^2} = \frac{\sqrt{12^2 + 11^2}}{5} = \frac{\sqrt{265}}{5} \quad (\text{答})$$

点 P が線分 BC と線分 DE の交点であるとき, DE 上の点として

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OD} + 5k\overrightarrow{DE} = (2, 2, 0) + k(12, 11, 0) \quad (k \text{ は実数}) \quad \dots\dots (*)$$

と表され, 線分 BC: $x + \frac{y}{2} = 1, x \geq 0, y \geq 0, z = 0$ 上にあることより

$$2(12k + 2) + (11k + 2) = 2 \quad \therefore k = -\frac{4}{35}$$

(*) より

$$P\left(\frac{22}{35}, \frac{26}{35}, 0\right) \quad (\text{答})$$