

図チャレ 第224回(2020年5月)

$\triangle ABC$ において $AB = 3$, $BC = 1$, $\angle B = 90^\circ$ とする。 $\angle B$ の二等分線と辺 AC の交点を D とし, 3点 A , B , D を通る円と直線 BC の交点のうち点 B と異なる点を E とする。また, 直線 AB と直線 DE の交点を F とする。

- (1) 線分 AD の長さを求めなさい。
- (2) 線分 BE の長さを求めなさい。
- (3) 線分 AF の長さを求めなさい。

出典：2020年 大分大学 理工学部・経済学部・教育学部

解答

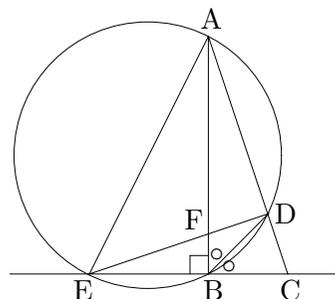
- (1) $\angle ABD = \angle CBD$ より

$$AD : DC = AB : BC = 3 : 1$$

$\angle ABC = 90^\circ$ であるから, 三平方の定理より

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{10}$$

$$\therefore AD = \frac{3}{3+1}AC = \frac{3\sqrt{10}}{4} \quad (\text{答})$$



- (2) 円周角の性質より

$$\angle AED = \angle ABD = \frac{1}{2}\angle ABC = 45^\circ$$

$\triangle ABD$ において正弦定理より, 円の直径は

$$AE = \frac{AD}{\sin 45^\circ} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$$

直角三角形 ABE において, 三平方の定理より

$$BE = \sqrt{AE^2 - AB^2} = \sqrt{\frac{45}{4} - 3^2} = \frac{3}{2} \quad (\text{答})$$

- (3) $\triangle ABC$ と線分 ED に対してメネラウスの定理を適用すると

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BE}{EC} \cdot \frac{CD}{DA} = \frac{AF}{FB} \cdot \frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2} + 1} \cdot \frac{1}{3} = 1$$

$$\therefore \frac{AF}{FB} = 5$$

$$\therefore AF = 3 \times \frac{5}{5+1} = \frac{5}{2} \quad (\text{答})$$