

図チャレ 第 225 回 (2020 年 6 月)

α, β を複素数とし, 複素数平面上の点 $O(0)$, $A(\alpha)$, $B(\beta)$, $C(|\alpha|^2)$, $D(\bar{\alpha}\beta)$ を考える。3 点 O, A, B は三角形をなすとす。また, 複素数 z に対し, $\text{Im}(z)$ によって z の虚部を表すことにする。以下の問いに答えよ。

(問 1) $\triangle OAB$ の面積を S_1 , $\triangle OCD$ の面積を S_2 とするとき, $\frac{S_2}{S_1}$ を求めよ。

(問 2) $\triangle OAB$ の面積 S_1 は $\frac{1}{2}|\text{Im}(\bar{\alpha}\beta)|$ で与えられることを示せ。

(問 3) 実数 a, b に対し, 複素数 z を $z = a + bi$ で定める。 $1 \leq a \leq 2$, $1 \leq b \leq 3$ のとき, 3 点 $O(0)$, $P(z)$, $Q\left(\frac{1}{z}\right)$ を頂点とする $\triangle OPQ$ の面積の最大値と最小値を求めよ。

出典 : 2020 年 熊本大学 理系学部

解答

(問 1) $|\alpha|^2 = \alpha\bar{\alpha}$ より

$$|\alpha|^2 : \bar{\alpha}\beta = \alpha : \beta$$

であることに注意すると, 原点 O を中心に

$\triangle OAB$ を $\arg \bar{\alpha}$ だけ回転して $|\alpha|$ 倍すると $\triangle OCD$ になる。

特に, 相似比は $1 : |\alpha|$ であるから, 面積比は

$$\frac{S_2}{S_1} = |\alpha|^2 \quad (\text{答})$$

(問 2) 点 $C(|\alpha|^2)$ が実軸上にあることに注目すると

$$S_2 = \frac{1}{2} \cdot |\alpha|^2 \cdot |\text{Im}(\bar{\alpha}\beta)|$$

であるから, 問 1 より

$$S_1 = \frac{S_2}{|\alpha|^2} = \frac{1}{2} |\text{Im}(\bar{\alpha}\beta)|$$

(証明おわり)

(問 3) 問 1, 問 2 より, $\triangle OPQ$ の面積 S は

$$S = \frac{1}{2} \left| \text{Im} \left(\frac{\bar{z}}{z} \right) \right|$$

ここで,

$$\frac{\bar{z}}{z} = \frac{a - bi}{a + bi} = \frac{(a - bi)^2}{(a + bi)(a - bi)} = \frac{a^2 - b^2 - 2abi}{a^2 + b^2}$$

であるから, $a > 0, b > 0$ のとき

$$S = \frac{ab}{a^2 + b^2} = \frac{1}{\frac{a}{b} + \frac{b}{a}}$$

$m = \frac{b}{a}$ とおくと,

$$S = \frac{1}{m + \frac{1}{m}}$$

であり, $1 \leq a \leq 2, 1 \leq b \leq 3$ より

$$\frac{1}{2} \leq m \leq 3$$

である。

$$f(m) = m + \frac{1}{m} \quad \left(\frac{1}{2} \leq m \leq 3\right)$$

とおくと

$$f'(m) = 1 - \frac{1}{m^2}$$

$\frac{1}{2} < m < 3$ において

$$f'(m) < 0 \iff 1 < \frac{1}{m^2} \iff m^2 < 1 \iff \frac{1}{2} < m < 1$$

であるから, $\frac{1}{2} \leq m \leq 3$ における $f(m)$ の増減は

$f(m)$	$\frac{1}{2}$	1	3
$f'(m)$	-	0	+
$f(m)$		↘ 極小 ↗	

である。

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2} = \frac{15}{6}$$

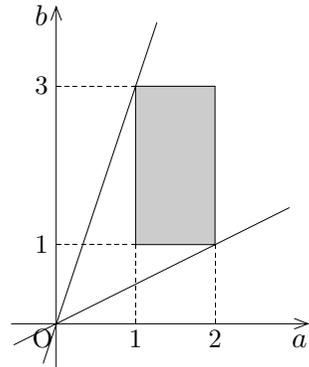
$$f(1) = 1 + 1 = 2$$

$$f(3) = 3 + \frac{1}{3} = \frac{10}{3} = \frac{20}{6}$$

であることを考えると, $S = \frac{1}{f(m)}$ の

$$\text{最大値は } \frac{1}{2}, \text{ 最小値は } \frac{3}{10} \quad (\text{答})$$

である。



(注) $S = \frac{ab}{a^2 + b^2}$ を導くのに, 問 1, 問 2 は必ずしも用いてなくてもよい。

$$z = a + bi$$

$$\frac{1}{z} = \frac{a - bi}{(a + bi)(a - bi)} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}$$

であるから, ab 平面上における公式を用いて, $\triangle OPQ$ の面積は

$$S = \frac{1}{2} \left| a \cdot \frac{-b}{a^2 + b^2} - b \cdot \frac{a}{a^2 + b^2} \right| = \frac{ab}{a^2 + b^2}$$