

図チャレ 第 226 回 (2020 年 7 月)

内接円の半径が 1 である $\triangle ABC$ を考える。 $\angle A = \frac{\pi}{3}$, $\angle B = 2\theta$ とし, $\triangle ABC$ の面積を S とする。次の問に答えよ。

- (1) θ の範囲を求めよ。
- (2) S を θ を用いて表せ。
- (3) S の最小値を求めよ。

出典：2020 年 大阪教育大学

解答

- (1) $2\theta > 0$ かつ $\frac{2}{3}\pi - 2\theta > 0$ より

$$0 < \theta < \frac{\pi}{3} \quad (\text{答})$$

(2) $AB = \tan \frac{\pi}{3} + \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sqrt{3} + \frac{1}{\tan \theta} = \frac{\sqrt{3} \tan \theta + 1}{\tan \theta}$

$$\begin{aligned} AC &= \tan \frac{\pi}{3} + \tan\left\{\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{3} - \theta\right)\right\} \\ &= \sqrt{3} + \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right)} \\ &= \sqrt{3} + \frac{1 + \tan \frac{\pi}{3} \tan \theta}{\tan \frac{\pi}{3} - \tan \theta} \\ &= \sqrt{3} + \frac{1 + \sqrt{3} \tan \theta}{\sqrt{3} - \tan \theta} \\ &= \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3} - \tan \theta) + 1 + \sqrt{3} \tan \theta}{\sqrt{3} - \tan \theta} \\ &= \frac{4}{\sqrt{3} - \tan \theta} \end{aligned}$$

$\triangle ABC$ の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \frac{\pi}{3} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\sqrt{3} \tan \theta + 1}{\tan \theta} \cdot \frac{4}{\sqrt{3} - \tan \theta} \end{aligned}$$

$$= \frac{3 \tan \theta + \sqrt{3}}{\tan \theta (\sqrt{3} - \tan \theta)} \quad (\text{答})$$

(3) $\tan \theta = t$ とおくと

$$S = \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}t + 1}{\sqrt{3}t - t^2} \quad (0 < t < \sqrt{3})$$

微分すると

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}t - t^2) - (\sqrt{3}t + 1)(\sqrt{3} - 2t)}{(\sqrt{3}t - t^2)^2} \\ &= \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}t^2 + 2t - \sqrt{3}}{(\sqrt{3}t - t^2)^2} \\ &= \frac{\sqrt{3}(t + \sqrt{3})(\sqrt{3}t - 1)}{(\sqrt{3}t - t^2)^2} \end{aligned}$$

t	(0)	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$(\sqrt{3})$
$\frac{dS}{dt}$	-	0	+
S	\searrow	極小	\nearrow

S は $t = \frac{1}{\sqrt{3}}$ のとき

$$\text{最小値 } \sqrt{3} \cdot \frac{1+1}{1-\frac{1}{3}} = 3\sqrt{3} \quad (\text{答})$$

をとる。

(考察) (1), (2) の設問がなければ, 次のように解くこともできる。

$BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ とおくと, 余弦定理より

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \frac{\pi}{3} = b^2 - bc + c^2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\triangle ABC$ の面積 S を 2 通りに表すと

$$S = \frac{1}{2}bc \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot b \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot c \cdot 1$$

$$\therefore S = \frac{\sqrt{3}}{4}bc$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}bc = a + b + c \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①かつ②より a を消去すると

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}bc - b - c\right)^2 = b^2 - bc + c^2$$

$$\frac{3}{4}b^2c^2 - \sqrt{3}bc(b+c) + (b+c)^2 = b^2 - bc + c^2$$

$$\frac{3}{4}b^2c^2 - \sqrt{3}bc(b+c) + 3bc = 0$$

$$\frac{3}{4}bc - \sqrt{3}(b+c) + 3 = 0$$

$$\therefore bc = \frac{4}{\sqrt{3}}(b+c) - 4$$

相加・相乗平均の不等式より

$$bc \geq \frac{8}{\sqrt{3}}\sqrt{bc} - 4$$

$$\sqrt{3}bc - 8\sqrt{bc} + 4\sqrt{3} \geq 0$$

$$\therefore (\sqrt{bc} - 2\sqrt{3})(\sqrt{3}\sqrt{bc} - 2) \geq 0 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

(等号成立条件は $b = c$)

ここで、三角形の成立条件(三角不等式)と②より

$$c < a + b = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}bc - b - c\right) + b = \frac{\sqrt{3}}{2}bc - c$$

であるから

$$1 < \frac{\sqrt{3}}{2}b - 1 \quad \therefore b > \frac{4}{\sqrt{3}}$$

同様に、 $b < c + a$ より

$$c > \frac{4}{\sqrt{3}}$$

も成り立つから

$$\sqrt{bc} > \frac{4}{\sqrt{3}} \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

③, ④より

$$\sqrt{bc} \geq 2\sqrt{3} \quad \therefore bc \geq 12$$

よって、 $\triangle ABC$ の面積 S は

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4}bc \geq 3\sqrt{3}$$

であり、不等式の等号は $b = c (= a)$ のとき成り立つから、

$$S \text{ の最小値は } 3\sqrt{3} \quad (\text{答})$$

である。