

## 図チャレ 第 227 回 (2020 年 8 月)

座標平面上において方程式  $x^3 + y^3 - xy = 0$  で表される曲線を  $C$  とする。

- (1) 曲線  $C$  と直線  $y = tx$  が原点以外で交わる点の座標を  $t$  で表せ。
- (2) 曲線  $C$  の概形を描け。ただし, 凹凸および漸近線も調べよ。
- (3) 曲線  $C$  で囲まれてできる領域の面積  $S$  を求めよ。

解答

$$(1) \begin{cases} x^3 + y^3 = xy \\ y = tx \end{cases} \text{ より } y \text{ を消去すると}$$

$$x^3 + t^3 x^3 = x \cdot tx$$

$x \neq 0$  のとき

$$(t^3 + 1)x = t \quad \therefore x = \frac{t}{t^3 + 1}$$

$y = tx$  より  $y$  座標も求めて, 曲線  $C$  と直線  $y = tx$  の交点の座標は

$$\left( \frac{t}{t^3 + 1}, \frac{t^2}{t^3 + 1} \right) \quad (\text{答})$$

- (2)  $t = 0$  のとき原点を表すと考えて, 曲線  $C$  は

$$x = \frac{t}{t^3 + 1}, \quad y = \frac{t^2}{t^3 + 1}$$

と媒介変数表示される。

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{1 \cdot (t^3 + 1) - t \cdot 3t^2}{(t^3 + 1)^2} \\ &= \frac{-2t^3 + 1}{(t^3 + 1)^2} \\ &= \frac{-(\sqrt[3]{2}t - 1)(\sqrt[3]{4}t^2 + \sqrt[3]{2}t + 1)}{(t + 1)^2(t^2 - t + 1)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \frac{2t(t^3 + 1) - t^2 \cdot 3t^2}{(t^3 + 1)^2} \\ &= \frac{-t^4 + 2t}{(t^3 + 1)^2} \\ &= \frac{-t(t - \sqrt[3]{2})(t^2 + \sqrt[3]{2}t + \sqrt[3]{4})}{(t + 1)^2(t^2 - t + 1)^2} \end{aligned}$$

の符号変化を調べることにより

$t$	$(-\infty)$	$(-1)$	$0$	$\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$	$\sqrt[3]{2}$	$(\infty)$					
$\frac{dx}{dt}$		+	<del>X</del>	+	+	0	-	-			
$\frac{dy}{dt}$		-	<del>X</del>	-	0	+	+	0	-		
$C$	(O)	$\nearrow$	<del>X</del>	$\nwarrow$	O	$\searrow$	A	$\swarrow$	B	$\nearrow$	(O)

ただし,

$$O(0, 0), \quad A\left(\frac{\sqrt[3]{4}}{3}, \frac{\sqrt[3]{2}}{3}\right), \quad B\left(\frac{\sqrt[3]{2}}{3}, \frac{\sqrt[3]{4}}{3}\right)$$

$t \neq -1, \frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \sqrt[3]{2}$  において

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{t^4 - 2t}{2t^3 - 1}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right) \\ &= \frac{\frac{d}{dt} \left( \frac{dy}{dx} \right)}{\frac{dx}{dt}} \\ &= \frac{(t^3 + 1)^2 \cdot (4t^3 - 2)(2t^3 - 1) - (t^4 - 2t) \cdot 6t^2}{-2t^3 + 1} \cdot \frac{1}{(2t^3 - 1)^2} \\ &= \frac{(t^3 + 1)^2 \cdot 2t^6 + 4t^3 + 2}{-2t^3 + 1} \cdot \frac{1}{(2t^3 - 1)^2} \\ &= \frac{-2(t^3 + 1)^4}{(2t^3 - 1)^3} \end{aligned}$$

$C$  を  $t < -1$  と  $-1 < t \leq \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$  と  $\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \leq t$  とに分けると, それぞれ  $x$  の関数のグラフとみなすことができ,

$$t < \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \text{ では } \frac{d^2y}{dx^2} > 0 \text{ であるから下に凸,}$$

$$t > \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \text{ では } \frac{d^2y}{dx^2} < 0 \text{ であるから上に凸}$$

であることがわかる。

$$x^3 + y^3 = xy \text{ に対して}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \{y - (ax + b)\} = 0 \quad (a, b \text{ は定数})$$

を満たすとする。  $y - ax = \beta$  とおくと、

$$x^3 + (ax + \beta)^3 = x(ax + \beta)$$

より

$$1 + \left(a + \frac{\beta}{x}\right)^3 = \frac{a}{x} + \frac{\beta}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \beta = \lim_{x \rightarrow \infty} (y - ax) = b, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\beta}{x^2} = 0 \text{ より}$$

$$1 + a^3 = 0 \quad \therefore a = -1$$

このとき

$$x^3 + (-x + \beta)^3 = x(-x + \beta)$$

$$3\beta x^2 - 3\beta^2 x + \beta^3 = -x^2 + \beta x$$

$$(3\beta + 1)x^2 = 3\beta^2 x + \beta x - \beta^3$$

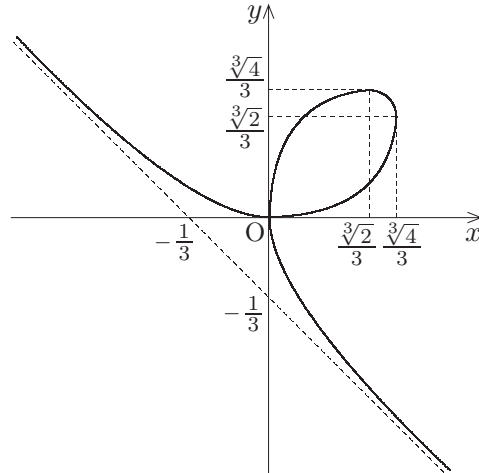
$$3\beta + 1 = \frac{\beta(3\beta + 1)}{x} - \frac{\beta^3}{x^2}$$

$x \rightarrow \infty$  とすると、  $\lim_{x \rightarrow \infty} \beta = b$  より

$$3b + 1 = 0 \quad \therefore b = -\frac{1}{3}$$

$x \rightarrow -\infty$  においても同様であり、曲線  $C$  は漸近線  $y = -x - \frac{1}{3}$  をもつ。

以上の考察より、曲線  $C$  の概形は



(答)

(3)  $C : x^3 + y^3 = xy$  と直線  $y = x$  の交点は

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$C$  の  $t \geq \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$  における陰関数を  $y = f(x)$  とするとき、 $C$  で囲まれてできる領域の面積  $S$  は

$$\begin{aligned}
S &= 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \{f(x) - x\} dx \\
&= 2 \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx - \left[ x^2 \right]_0^{\frac{1}{2}} \\
&= 2 \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx - \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

ここで,  $x = \frac{t}{t^3 + 1}$  により置換積分すると

$$\begin{aligned}
2 \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx &= 2 \int_{\infty}^1 \frac{t^2}{t^3 + 1} \left( \frac{t}{t^3 + 1} \right)' dt \\
&= \frac{2}{3} \int_{\infty}^1 \frac{3t^2}{t^3 + 1} \cdot \frac{-2t^3 + 1}{(t^3 + 1)^2} dt \\
&= \frac{2}{3} \int_{\infty}^1 \frac{-2(t^3 + 1) + 3}{(t^3 + 1)^3} \cdot (t^3 + 1)' dt \\
&= \frac{2}{3} \left[ 2 \cdot \frac{1}{t^3 + 1} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{(t^3 + 1)^2} \right]_{\infty}^1 \\
&= \frac{2}{3} \times \left( 1 - \frac{3}{2} \times \frac{1}{4} \right) \\
&= \frac{5}{12}
\end{aligned}$$

であるから,

$$S = \frac{5}{12} - \frac{1}{4} = \frac{1}{6} \quad (\text{答})$$

(注) 広義積分の表現に抵抗があれば,  $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_{\alpha}^1$  と記述するか,  $y \leq x$  の部分の面積を求めて 2 倍してもよい。