

図チャレ 第 228 回 (2020 年 9 月)

三角形 ABC は一辺の長さ 1 の正三角形であり，辺 AB, BC の中点をそれぞれ M, N とし，辺 BC を 5 : 1 に内分する点を D とする。直線 AD と直線 MN の交点を E とする。

- (1) AE の長さを求めよ。
- (2) 三角形 BEM の外接円と直線 BC との交点のうち，B でない方を P とするとき，BP の長さを求めよ。

解答

- (1) $\triangle ABC$ において中点連結定理より

$$AC \parallel MN$$

であるから

$$\angle DAC = \angle DEN, \quad \angle DCA = \angle DNE$$

であり，

$$\triangle DAC \sim \triangle DEN$$

が成り立つ。対応する辺の長さの比を考えて

$$AD : DE = CD : DN$$

$$BD : DC = 5 : 1, \quad BN : NC = 3 : 3 \text{ より}$$

$$CD : DN = 1 : 2$$

であるから，

$$AE = 3AD$$

である。

$\triangle ABD$ に余弦定理を適用すると

$$AD^2 = 1^2 + \left(\frac{5}{6}\right)^2 - 2 \cdot 1 \cdot \frac{5}{6} \cdot \cos 60^\circ$$

$$= 1 + \frac{25}{36} - \frac{5}{6}$$

$$= \frac{31}{36}$$

$$\therefore AD = \frac{\sqrt{31}}{6}$$

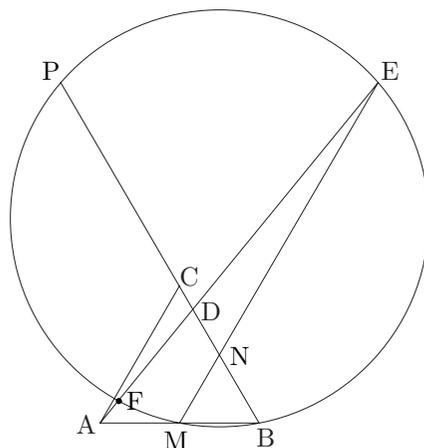
AE の長さは

$$AE = 3 \cdot \frac{\sqrt{31}}{6} = \frac{\sqrt{31}}{2} \quad (\text{答})$$

- (2) DP の長さを求めて，BD + DP を計算する。

線分 AD と外接円の交点を F とすると，点 A に関する方べきを考えて

$$AE \cdot AF = AM \cdot AB$$



$$\frac{\sqrt{31}}{2}AF = \frac{1}{2} \cdot 1$$

$$\therefore AF = \frac{1}{\sqrt{31}}$$

DE, DF の長さは

$$DE = 2AD = \frac{\sqrt{31}}{3}$$

$$DF = AD - AF = \frac{\sqrt{31}}{6} - \frac{1}{\sqrt{31}} = \frac{25}{6\sqrt{31}}$$

点 D に関する方べきを考えると

$$BD \cdot DP = DE \cdot DF$$

$$\frac{5}{6}DP = \frac{\sqrt{31}}{3} \cdot \frac{25}{6\sqrt{31}}$$

$$\therefore DP = \frac{5}{3}$$

BP の長さは

$$BP = BD + DP = \frac{5}{6} + \frac{5}{3} = \frac{5}{2} \quad (\text{答})$$