

図チャレ 第 229 回 (2020 年 10 月)

座標平面上において、原点を中心とする半径 $\sqrt{2}$ の円を C_1 とし、中心が直線 $y = x$ 上にあり、点 $A(2, 0)$ を通る円を C_2 とする。 C_1 と C_2 が 2 点 P, Q で交わるとき、三角形 APQ の面積 S の最大値を求めよ。

解答

C_1 の中心と C_2 の中心はともに直線 $y = x$ 上にあるから、直線 $y = x$ は弦 PQ の垂直二等分線である。 PQ の中点を (t, t) ($-1 < t < 1$) とおくと、直線 PQ の方程式は

$$x + y = 2t$$

原点 O と直線 PQ の距離 d は

$$d = \frac{|0 + 0 - 2t|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \sqrt{2}|t|$$

であるから、弦 PQ の長さは

$$\overline{PQ} = 2\sqrt{2 - d^2} = 2\sqrt{2 - 2t^2} = 2\sqrt{2}\sqrt{1 - t^2}$$

点 A から直線 PQ におろした垂線の長さ h は

$$h = \frac{|2 + 0 - 2t|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \sqrt{2}|1 - t|$$

三角形 APQ の面積 S は

$$S = \frac{1}{2} \cdot \overline{PQ} \cdot h = 2|1 - t|\sqrt{1 - t^2} = 2\sqrt{(1 - t)^3(1 + t)}$$

$f(t) = (1 - t)^3(1 + t) = -(t - 1)^3(t + 1)$ ($-1 < t < 1$) とおくと、

$$\begin{aligned} f'(t) &= -3(t - 1)^2(t + 1) - (t - 1)^3 \cdot 1 \\ &= -(t - 1)^2\{3(t + 1) + t - 1\} \\ &= -4\left(t + \frac{1}{2}\right)(t - 1)^2 \end{aligned}$$

t	(-1)	$-\frac{1}{2}$	(1)
$f'(t)$		$+$ 0 $-$	
$f(t)$		\nearrow 極大 \searrow	

$S = 2\sqrt{f(t)}$ の最大値は

$$2\sqrt{f\left(-\frac{1}{2}\right)} = 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad (\text{答})$$

(注) 上の解答は、数学 II までの範囲で書かれているが、数学 III を習ったあとでは

$$\frac{d}{dt}(1 - t)^3 = 3(1 - t)^2(1 - t)' = -3(1 - t)^2$$

と直接計算できる。もっとも、微分を知らない人にはどちらも使えないのだから、そのような配慮は必要なかったかもしれない。