

図チャレ 第 230 回 (2020 年 11 月)

座標空間において, xy 平面上の直線 $\ell: x + y = 2, z = 0$ を含む平面を α とする。

- (1) 平面 α 上の任意の点 $P(x, y, z)$ が方程式 $ax + by + cz + d = 0$ (a, b, c, d は定数, $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$) を満たすとき, a, b, c, d が満たすべき関係式を求めよ。
- (2) 平面 α と xy 平面が $\frac{\pi}{6}$ をなすとき, α の方程式を求めよ。
- (3) (2) で求めた 2 つの平面と球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ との交円のうち, $z > 0$ にある方を C とする。円 C の中心の座標を求めよ。

解答

- (1) 平面 α は ℓ 上の点 $A(2, 0, 0)$ を通るから

$$a \cdot 2 + b \cdot 0 + c \cdot 0 + d = 0 \quad \therefore d = -2a$$

よって, α 上の点 $P(x, y, z)$ はつねに

$$a(x - 2) + by + cz = 0$$

を満たす。これは $\vec{v} = (a, b, c)$ が

$$\vec{v} \cdot \vec{AP} = 0$$

を満たすことを意味し, α は ℓ を含むから

$$\vec{v} \perp \ell$$

以上より, 条件は

$$a \cdot 1 + b(-1) + c \cdot 0 = 0 \quad \text{かつ} \quad d = -2a$$

$$\therefore a = b \quad \text{かつ} \quad d = -2a \quad (\text{答})$$

- (別解) ℓ は点 $(2, 0, 0)$ を通りベクトル $(1, -1, 0)$ に平行であるから

$$\ell \text{ 上の点は } (t + 2, -t, 0) \quad (t \text{ は実数})$$

と表され,

$$a(t + 2) + b(-t) + c \cdot 0 + d = 0$$

が任意の実数 t に対して成り立つことより

$$a = b \quad \text{かつ} \quad 2a + d = 0 \quad (\text{答})$$

(注) 同値な表現はたくさんある。

- (2) 平面 α の法線ベクトルを $\vec{v} = (a, b, c)$, xy 平面の法線ベクトルを $\vec{n} = (0, 0, 1)$ とおくと, \vec{v} に平行な直線と \vec{n} に平行な直線が $\frac{\pi}{6}$ をなすから

$$\cos \frac{\pi}{6} = \frac{|\vec{v} \cdot \vec{n}|}{|\vec{v}| |\vec{n}|} = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \times 1}$$

$$\sqrt{3} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 2c$$

$$3(a^2 + b^2 + c^2) = 4c^2 \quad \therefore c^2 = 3(a^2 + b^2)$$

(1)より $a = b$ であるから

$$c = \pm\sqrt{6}a$$

よって, α の法線ベクトル \vec{v} は

$$\vec{v} = (1, 1, \pm\sqrt{6})$$

としてよく, α が点 $(2, 0, 0)$ を通ることも考えて, α の方程式は

$$(x-2) + y \pm \sqrt{6}z = 0 \quad \therefore x + y \pm \sqrt{6}z - 2 = 0 \quad (\text{答})$$

(3) 平面 α と z 軸との交点は $(0, 0, \pm\frac{2}{\sqrt{6}})$ であり, 球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ との交円が

$z > 0$ にあるのは, 点 $(0, 0, \frac{2}{\sqrt{6}})$ を通る方である。交円 C の中心は, 原点 O から平面

$$x + y + \sqrt{6}z - 2 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

におろした垂線の足 H である。 \overrightarrow{OH} は平面 $\textcircled{1}$ の法線ベクトルと平行であるから

$$\overrightarrow{OH} = t(1, 1, \sqrt{6}) \quad (t \text{ は正の実数}) \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

と表される。点 H は平面 $\textcircled{1}$ 上の点であるから

$$t + t + \sqrt{6}\sqrt{6}t - 2 = 0 \quad \therefore t = \frac{1}{4}$$

$\textcircled{2}$ より, 交円 C の中心は

$$H\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{\sqrt{6}}{4}\right) \quad (\text{答})$$

(2)(3)の別解:

原点 O から ℓ におろした垂線の足を $B(1, 1, 0)$ とし, O から α におろした垂線の足を H とすると, 2 平面のなす角の条件は

$$\angle OBH = \frac{\pi}{6}$$

$$\angle BOH = \frac{\pi}{3}, \quad OB = \sqrt{2} \quad \text{より}$$

$$\overrightarrow{OH} \parallel \left(1, 1, \pm\sqrt{2} \tan \frac{\pi}{3}\right) = (1, 1, \pm\sqrt{6})$$

点 $B(1, 1, 0)$ を通ることを考え, 平面 α の方程式は

$$(x-1) + (y-1) \pm \sqrt{6}z = 0 \quad \therefore x + y \pm \sqrt{6}z - 2 = 0$$

$OH = OB \sin \frac{\pi}{6} = \sqrt{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ であるから,

$$\overrightarrow{OH} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+1+6}}(1, 1, \pm\sqrt{6}) = \frac{1}{4}(1, 1, \pm\sqrt{6})$$

$z > 0$ にあるのは

$$H\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{\sqrt{6}}{4}\right)$$