

図チャレ 第231回(2020年12月)

- (1) 点 z, z^2, z^4 が同一直線上にあるような点 z が描く図形を複素数平面上に図示せよ。
 (2) a, b は実数定数 ($ab \neq 2$) であるとする。点 z が (1) で求めた図形上を動くとき, 点 $w = \frac{az+2}{z+b}$ も同じ図形上を動くような a, b を求めよ。

解答

- (1) $z = z^2$ のとき

$$z^2 - z = z(z-1) = 0 \quad \therefore z = 0, 1$$

このとき $z = z^2 = z^4$ であり, 条件を満たす。

$z \neq z^2$ のとき, 点 z, z^2, z^4 が同一直線上にあるのは

$$\frac{z^4 - z}{z^2 - z} = z^2 + z + 1 \text{ が実数}$$

のときであり,

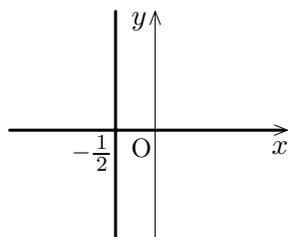
$$\bar{z}^2 + \bar{z} + 1 = z^2 + z + 1$$

$$z^2 - \bar{z}^2 + z - \bar{z} = 0$$

$$(z - \bar{z})(z + \bar{z} + 1) = 0$$

$$\therefore \bar{z} = z \text{ または } \frac{z + \bar{z}}{2} = -\frac{1}{2} \quad (z = 0, 1 \text{ のときも含む})$$

複素数平面上に図示すると



(答)

- (2) $\bar{a} = a, \bar{b} = b$ であるから, $\bar{z} = z$ のとき $\bar{w} = w$ である。よって, $z + \bar{z} + 1 = 0$ のとき $w = \bar{w}$ または $w + \bar{w} + 1 = 0$ となる条件を求めればよい。

$$\begin{aligned} w = \frac{az+2}{z+b} &\iff w(z+b) = az+2 \\ &\iff (w-a)z = -bw+2 \\ &\iff z = \frac{-bw+2}{w-a} \end{aligned}$$

であるから, $z + \bar{z} + 1 = 0$ のとき

$$\frac{-bw+2}{w-a} + \frac{-b\bar{w}+2}{\bar{w}-a} + 1 = 0$$

$$(-bw+2)(\bar{w}-a) + (w-a)(-b\bar{w}+2) + (w-a)(\bar{w}-a) = 0$$

$$(-2b+1)w\bar{w} + (ab-a+2)(w+\bar{w}) + a^2 - 4a = 0$$

ここで $-2b+1 \neq 0$ とすると、点 w はある円周上を動き、

$$w = \bar{w} \text{ または } w + \bar{w} + 1 = 0$$

がつねに成り立つことはできないから、

$$-2b+1 = 0 \quad \therefore b = \frac{1}{2}$$

このとき

$$\left(\frac{1}{2}a - a + 2\right)(w + \bar{w}) + a(a - 4) = 0$$

$$(a - 4)\left(\frac{w + \bar{w}}{2} - a\right) = 0$$

$ab \neq 2$ より $a \neq 4$ であり、これが $w + \bar{w} + 1 = 0$ を表す条件は

$$-2a = 1 \quad \therefore a = -\frac{1}{2}$$

以上より、求める値は

$$a = -\frac{1}{2}, \quad b = \frac{1}{2} \quad (\text{答})$$