

## 図チャレ 第 232 回 (2021 年 1 月)

$xy$  平面上で  $P(\cos \theta, \sin \theta)$ ,  $Q\left(\cos\left(\theta + \frac{2021}{3}\pi\right), \sin\left(\theta + \frac{2021}{3}\pi\right)\right)$  とするとき, 線分  $PQ$  が領域  $m(x-2) \leq y \leq -m(x-2)$  に含まれるような実数  $m$  の最小値を求めよ.

解答

$\sin, \cos$  の基本周期は  $2\pi$  であるから,  $2021 = 6 \times 337 - 1$  であることを考えて,

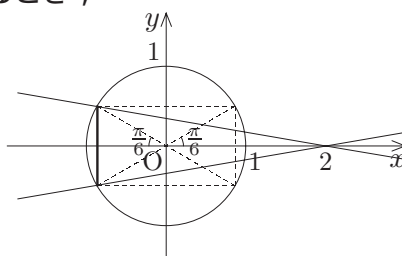
$$Q\left(\cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right), \sin\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)\right)$$

直線  $y = -m(x-2)$  が点  $\left(\cos \frac{5}{6}\pi, \sin \frac{5}{6}\pi\right)$  を通るとき,

$$\frac{1}{2} = -m\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 2\right)$$

$$(4 + \sqrt{3})m = 1$$

$$\therefore m = \frac{1}{4 + \sqrt{3}} = \frac{4 - \sqrt{3}}{13}$$



$Q\left(\cos \frac{5}{6}\pi, \sin \frac{5}{6}\pi\right)$  のとき  $\theta = \frac{7}{6}\pi$  であり,

$\frac{\pi}{6} \leq \theta < \frac{5}{6}\pi$  のとき  $P$  が  $y > -m(x-2)$  に,

$\frac{5}{6}\pi \leq \theta < \frac{7}{6}\pi$  のとき  $Q$  が  $y > -m(x-2)$  に,

$\frac{7}{6}\pi < \theta \leq \frac{11}{6}\pi$  のとき  $P$  が  $y < m(x-2)$  に,

$\frac{11}{6}\pi < \theta < \frac{13}{6}\pi$  のとき  $Q$  が  $y < m(x-2)$  に

あるから

$$m \text{ の最小値は } \frac{4 - \sqrt{3}}{13} \quad (\text{答})$$

(注) 最小値は容易に予想できるので, 実質的にはその場合以外は大きくなることを証明する問題である。 $Q\left(\cos\left(\theta - \frac{2}{3}\pi\right), \sin\left(\theta - \frac{2}{3}\pi\right)\right)$  などにでもなってくれば, 問題としてはもっと面白かったと思う。