

## 図チャレ 第233回(2021年2月)

$\triangle ABC$ において  $BC=4$ ,  $\tan \frac{B}{2} = \frac{1}{3}$ ,  $\tan \frac{C}{2} = \frac{1}{5}$  とする。

(1)  $\triangle ABC$ の内接円の半径は  $\frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}$  である。

(2)  $\sin B = \frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}$ ,  $\sin C = \frac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}$  である。

(3)  $AB = \frac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}}$  である。

(4)  $\triangle ABC$ の面積は  $\frac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}}$  である。

出典：2011年 上智大学 経済学部

### 解答

(1)  $\triangle ABC$ の内接円の半径を  $r$  とすると

$$\begin{aligned} \frac{r}{\tan \frac{B}{2}} + \frac{r}{\tan \frac{C}{2}} &= BC \\ 3r + 5r &= 4 \\ \therefore r &= \frac{\boxed{1}}{\boxed{2}} \end{aligned}$$

(シ)  
(ス)

(2) 単位円周上の点の座標を媒介変数表示する公式より

$$\begin{aligned} \sin B &= \frac{2 \tan \frac{B}{2}}{1 + \tan^2 \frac{B}{2}} = \frac{2 \times \frac{1}{3}}{1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\boxed{3}}{\boxed{5}} \\ \sin C &= \frac{2 \tan \frac{C}{2}}{1 + \tan^2 \frac{C}{2}} = \frac{2 \times \frac{1}{5}}{1 + \left(\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{\boxed{5}}{\boxed{13}} \end{aligned}$$

(セ)  
(ソ)  
(タ)  
(チ)  
(テ)  
(ト)  
(ナ)  
(フ)

(3) (2)と同様にして,

$$\cos B = \frac{1 - \tan^2 \frac{B}{2}}{1 + \tan^2 \frac{B}{2}} = \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2}{1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{4}{5}$$
$$\cos C = \frac{1 - \tan^2 \frac{C}{2}}{1 + \tan^2 \frac{C}{2}} = \frac{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^2}{1 + \left(\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{12}{13}$$

$A + B + C = \pi$  であるから, 補角の公式と加法定理より

$$\begin{aligned}\sin A &= \sin(B + C) \\ &= \sin B \cos C + \cos B \sin C \\ &= \frac{3}{5} \cdot \frac{12}{13} + \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{13} = \frac{56}{65}\end{aligned}$$

正弦定理より

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A} \quad \therefore AB = 4 \times \frac{25}{56} = \frac{\boxed{25}}{\boxed{14}} \begin{matrix} (\text{ツ}) \\ (\text{テ}) \end{matrix}$$

(4)  $\triangle ABC$  の面積  $S$  は

$$S = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot \sin B = \frac{1}{2} \cdot \frac{25}{14} \cdot 4 \cdot \frac{3}{5} = \frac{\boxed{15}}{\boxed{7}} \begin{matrix} (\text{ト}) \\ (\text{ナ}) \end{matrix}$$