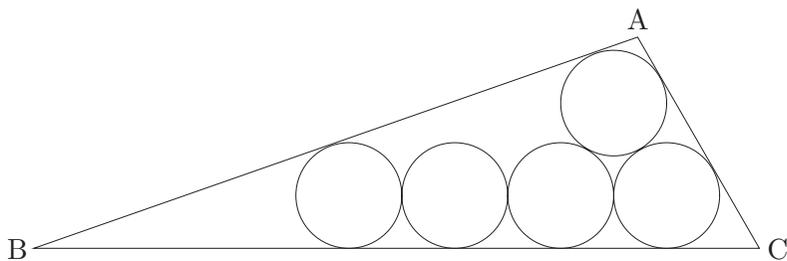


図チャレ 第 234 回 (2021 年 3 月)



図のように三角形 ABC の内部に半径 1 の円が 5 つ含まれている．4 つの円は辺 BC に接しながら横一列に互いに接しながら並び，左端の円は辺 AB に接し，右端の円は辺 AC に接している．また，もう一つの円は，辺 AB と辺 AC に接し，4 つの円の右側の 2 つの円に接している．このとき

$$AB = \frac{\sqrt{\begin{array}{|c|c|} \hline (1) & (2) \\ \hline \end{array}}}{\begin{array}{|c|c|} \hline (3) & (4) \\ \hline \end{array}} BC \qquad AC = \frac{\begin{array}{|c|c|} \hline (5) & (6) \\ \hline \end{array}}{\begin{array}{|c|c|} \hline (7) & (8) \\ \hline \end{array}} BC$$

$$BC = \frac{\begin{array}{|c|c|} \hline (9) & (10) \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline (11) & (12) \\ \hline \end{array} \sqrt{\begin{array}{|c|c|} \hline (13) & (14) \\ \hline \end{array}} + \begin{array}{|c|c|} \hline (15) & (16) \\ \hline \end{array} \sqrt{\begin{array}{|c|c|} \hline (17) & (18) \\ \hline \end{array}}}{\begin{array}{|c|c|} \hline (19) & (20) \\ \hline \end{array}}$$

である．ただし， $\begin{array}{|c|c|} \hline (13) & (14) \\ \hline \end{array} < \begin{array}{|c|c|} \hline (17) & (18) \\ \hline \end{array}$ とする．

出典：2021 年 慶應義塾大学 環境情報学部

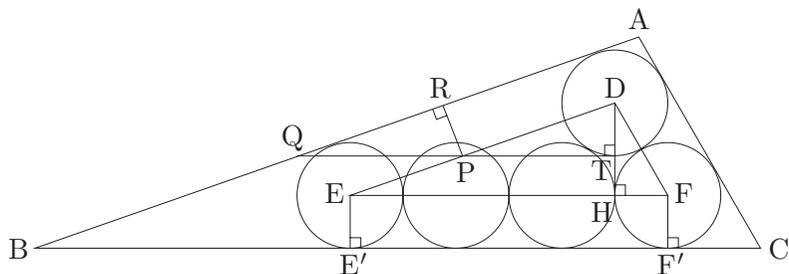
解答

上の円の中心を D，4 つ並んだ円のうち一番左の円の中心を E，一番右の円の中心を F とすると，外接の条件より

$$EF = 6, \quad DF = 2$$

点 D から線分 EF に下ろした垂線の足を H とすると，H は 2 円の接点であるから

$$EH = 5$$



線分 DH は一辺の長さ 2 の正三角形の中線であるから , その長さは

$$DH = \sqrt{3}$$

直角三角形 DEH において , 三平方の定理より

$$DE = \sqrt{DH^2 + EH^2} = \sqrt{3 + 25} = 2\sqrt{7}$$

AB // DE, BC // EF, CA // FD より $\triangle ABD \sim \triangle DEF$ であるから

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF} = \frac{2\sqrt{7}}{6} = \frac{\sqrt{\boxed{07}}}{\boxed{03}} \quad (1)(2)$$

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF} = \frac{2\sqrt{7}}{6} = \frac{\sqrt{\boxed{07}}}{\boxed{03}} \quad (3)(4)$$

$$\frac{AC}{BC} = \frac{DF}{EF} = \frac{2}{6} = \frac{\boxed{01}}{\boxed{03}} \quad (05)(06)$$

$$\frac{AC}{BC} = \frac{DF}{EF} = \frac{2}{6} = \frac{\boxed{01}}{\boxed{03}} \quad (07)(08)$$

線分 DH と円 D との交点を T とし , T における円 D の接線と線分 DE, AB との交点をそれぞれ P, Q とする。 $\triangle DPT \sim \triangle DEH$ より

$$\frac{DP}{DE} = \frac{PT}{EH} = \frac{DT}{DH} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore DP = \frac{DE}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{3}}, \quad PT = \frac{EH}{\sqrt{3}} = \frac{5}{\sqrt{3}}$$

点 P から辺 AB に下ろした垂線の足を R とすると ,

$$\triangle PQR \cong \triangle DPT$$

であるから

$$PQ = DP = \frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$$

点 E から辺 BC におろした垂線の足を E' とすると

$$\triangle EBE' \cong \triangle DQT$$

であるから

$$BE' = QT = PQ + PT = \frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{3}} + \frac{5}{\sqrt{3}}$$

点 F から辺 BC におろした垂線の足を F' とすると

$$\angle FCF' = 30^\circ$$

であるから

$$F'C = \frac{FF'}{\tan 30^\circ} = \sqrt{3}$$

よって , 辺 BC の長さは

$$BC = BE' + E'F' + F'C$$

$$= \frac{2\sqrt{7} + 5}{\sqrt{3}} + 6 + \sqrt{3}$$

$$= \frac{\boxed{18}}{\boxed{03}} + \frac{\boxed{08}}{\boxed{03}} \sqrt{\boxed{03}} + \frac{\boxed{02}}{\boxed{03}} \sqrt{\boxed{21}} \quad (19)(20)$$