

## 図チャレ 第 235 回 (2021 年 4 月)

三角形 ABC の辺 AB, BC, AC の長さをそれぞれ 5, 7, 6 とし, 点 P と点 Q はそれぞれ  $\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{AB}$  および  $\overrightarrow{BQ} = 2\overrightarrow{BC}$  を満たす点とする。さらに, 点 A から線分 PQ に下ろした垂線と線分 PQ の交点を H, 線分 AH と線分 BC の交点を R とする。以下の問いに答えよ。

- (1) BR : RC を求めよ。
- (2) AR : RH を求めよ。
- (3) 三角形 RHC の面積を求めよ。

出典 : 2021 年 九州大学

### 解答

(1) 点 R は線分 BC 上にあるから

$$\overrightarrow{AR} = (1-t)\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC} \quad (0 < t < 1) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

と表される。 $\overrightarrow{AR}$  は

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PQ} &= \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BQ} \\ &= \overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{BC} \\ &= -\overrightarrow{AB} + 2(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) \\ &= -3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} \end{aligned}$$

と垂直であるから

$$\overrightarrow{AR} \cdot \overrightarrow{PQ} = \{(1-t)\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}\} \cdot (-3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}) = 0$$

ここで,  $\triangle ABC$  において余弦定理より

$$\cos \angle BAC = \frac{5^2 + 6^2 - 7^2}{2 \cdot 5 \cdot 6} = \frac{1}{5}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 5 \times 6 \times \frac{1}{5} = 6$$

であるから

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AR} \cdot \overrightarrow{PQ} &= 3(t-1)|\overrightarrow{AB}|^2 + (2-5t)\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + 2t|\overrightarrow{AC}|^2 \\ &= 3(t-1) \times 5^2 + (2-5t) \times 6 + 2t \times 6^2 \\ &= 117t - 63 = 0 \end{aligned}$$

$$\therefore t = \frac{63}{117} = \frac{7}{13}$$

①に代入して

$$\overrightarrow{AR} = \frac{6}{13}\overrightarrow{AB} + \frac{7}{13}\overrightarrow{AC} = \frac{6\overrightarrow{AB} + 7\overrightarrow{AC}}{7+6} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\therefore BR : RC = 7 : 6 \quad (\text{答})$$

(2)  $\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BQ} = -\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$  より

$$\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AP}$$

$$\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AQ}) = \frac{1}{4}\overrightarrow{AP} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AQ}$$

②に代入すると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AR} &= \frac{6}{13}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AP}\right) + \frac{7}{13}\left(\frac{1}{4}\overrightarrow{AP} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AQ}\right) \\ &= \frac{19}{52}\overrightarrow{AP} + \frac{7}{26}\overrightarrow{AQ} \\ &= \frac{33}{52}\left(\frac{19}{33}\overrightarrow{AP} + \frac{14}{33}\overrightarrow{AQ}\right) \\ &= \frac{33}{52}\overrightarrow{AH}\end{aligned}$$

$$\therefore AR : RH = 33 : (52 - 33) = 33 : 19 \quad (\text{答})$$

(3)  $\triangle ABC$  の面積  $S$  は

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{5^2 \times 6^2 - 6^2} = \frac{6}{2}\sqrt{25 - 1} = 6\sqrt{6}\end{aligned}$$

(1), (2)の結果を用いて

$$\begin{aligned}\triangle RHC &= \frac{RH}{AR}\triangle ARC \\ &= \frac{19}{33} \cdot \frac{CR}{BC} \cdot \triangle ABC \\ &= \frac{19}{33} \cdot \frac{6}{13} \cdot 6\sqrt{6} = \frac{228\sqrt{6}}{143} \quad (\text{答})\end{aligned}$$

別解

「点PはABを2:1に外分し, 点QはBCを2:1に外分する」と表現すれば, 特にベクトルの問題というわけでもないのので, 図形的にも解いてみることにする。

(1)  $\triangle ABC$  において余弦定理より

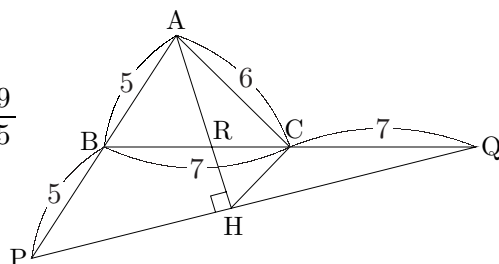
$$\cos \angle ABC = \frac{5^2 + 7^2 - 6^2}{2 \cdot 5 \cdot 7} = \frac{19}{35}$$

補角の公式より

$$\cos \angle PBQ = -\frac{19}{35}$$

$\triangle BPQ$  において余弦定理より

$$PQ^2 = 5^2 + 14^2 - 2 \cdot 5 \cdot 14 \cdot \left(-\frac{19}{35}\right)$$



$$\begin{aligned}
&= 25 + 196 + 76 \\
&= 297 \\
&= 3^3 \times 11
\end{aligned}$$

$$\therefore PQ = 3\sqrt{33}$$

$\triangle BPQ$ において余弦定理より

$$\cos \angle BPQ = \frac{5^2 + 297 - 14^2}{2 \cdot 5 \cdot 3\sqrt{33}} = \frac{126}{30\sqrt{33}} = \frac{7\sqrt{3}}{5\sqrt{11}}$$

$\angle AHP = 90^\circ$ であるから

$$PH = AP \cos \angle BPQ = 10 \times \frac{7\sqrt{3}}{5\sqrt{11}} = \frac{14\sqrt{3}}{\sqrt{11}}$$

$$QH = PQ - PH = 3\sqrt{33} - \frac{14\sqrt{3}}{\sqrt{11}} = \frac{19\sqrt{3}}{\sqrt{11}}$$

$\triangle BPQ$ にメネラウスの定理を適用すると

$$\frac{BR}{RQ} \cdot \frac{QH}{HP} \cdot \frac{PA}{AB} = \frac{BR}{RQ} \cdot \frac{19}{14} \cdot \frac{2}{1} = 1 \quad \therefore BR : RQ = 7 : 19$$

$7 + 19 = 26 = 13 \times 2$ に注意すると

$$BR : RC = 7 : 6 \quad (\text{答})$$

(2)  $\triangle APH$ にメネラウスの定理を適用すると

$$\frac{AR}{RH} \cdot \frac{HQ}{QP} \cdot \frac{PB}{BA} = \frac{AR}{RH} \cdot \frac{19}{19+14} \cdot \frac{1}{1} = 1$$

$$\therefore AR : RH = 33 : 19 \quad (\text{答})$$

(3) (1)より

$$\cos \angle ABC = \frac{19}{35}$$

であったから,

$$\begin{aligned}
\sin \angle ABC &= \sqrt{1 - \cos^2 \angle ABC} \\
&= \sqrt{1 - \left(\frac{19}{35}\right)^2} = \frac{\sqrt{(35+19)(35-19)}}{35} = \frac{12\sqrt{6}}{35}
\end{aligned}$$

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 7 \cdot \frac{12\sqrt{6}}{35} = 6\sqrt{6}$$

(1), (2)の結果を用いて

$$\begin{aligned}
\triangle RHC &= \frac{RH}{AR} \triangle ARC \\
&= \frac{19}{33} \cdot \frac{CR}{BC} \cdot \triangle ABC \\
&= \frac{19}{33} \cdot \frac{6}{13} \cdot 6\sqrt{6} = \frac{228\sqrt{6}}{143} \quad (\text{答})
\end{aligned}$$